Kontinuasjonseksamen i SIF 4005 Fysikk
(for Kjemi og metallurgi)
Tirsdag 17. august 1999.

Løsnin

LØSNINGS FORSLAG.

Oppgave 1.

$$V(r) = \frac{\rho_0 a^2}{18\varepsilon_0}\left(1 - 3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \qquad r \le a$$

$$V(r) = 0 \qquad r > 0$$

ρ_0 : konstant, enhet C/m^3, a : m.

a) $\vec{E} = -\nabla V$

Siden vi har sfærisk symmetri er

$$\vec{E} = E_r \hat{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r$$

hvor $\hat{e}_r$ er enhetsvektor i radiell retning.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho_0 a^2}{18\varepsilon_0}\left(-6\left(\frac{r}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} + 6\left(\frac{r}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}\right) \qquad r \le a$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \qquad r > a$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\hat{e}_r & r \leq a \\ 0 \quad \hat{e}_r & r > a \end{cases}$$

$|\vec{E}(r)|$ kontinuerlig ved $r = a$?

i) $r \leq a$:

$$\lim_{r \to a^-} |\vec{E}(r)| = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a} - \left(\frac{a}{a}\right)^2\right) = 0$$

ii) $r \geq a$ $\quad \lim_{r \to a^+} |\vec{E}(r)| = 0$

Feltet er kontinuerlig ved $r = a$

b) Ladningsfordelingen $\rho(r)$ finnes ved å bruke Gauss lov:

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = Q_{inne}/\varepsilon_0$$

Siden vi har sfærisk symmetri velges en sfærisk Gaussflate. Da er $\vec{dA} = \hat{e}_r \cdot dA$ og venstre side av Gauss lov blir:

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E}\,\vec{dA} = E_r \iint \hat{e}_r \hat{e}_r\, dA = E_r \cdot 4\pi r^2$$

Dette er gyldig for alle r.

Høyre side av Gauss lov :

i) for $r \leq a$:

$$Q_{inne}/\varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(r)\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r} \rho(r)\,4\pi r^2\,dr$$

Innsatt med E_r for $r \le a$ for venstre side av Gauss lov gir:

$$\frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r} \rho(r)\, 4\pi r^2 \, dr$$

Deriver begge sider mhp. r:

$$\frac{4\pi a \rho_0}{3\varepsilon_0}\left(3\frac{r^2}{a} - 4\frac{r^3}{a^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\rho(r) = \rho_0 a\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{3}\frac{r}{a^2}\right) = \rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)$$

For $r > a$ er $E_r = 0$ og $\rho(r) = 0$

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right) & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

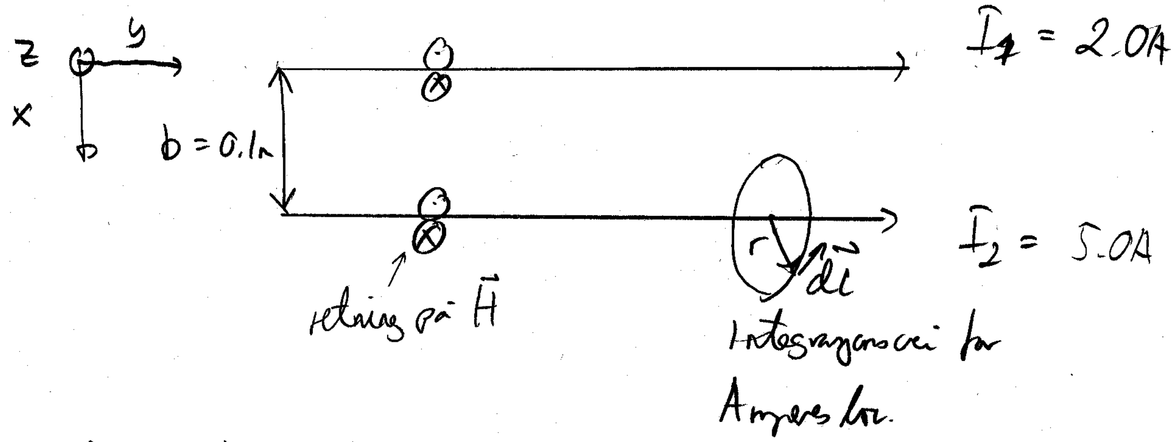
c) Nettoladning: $r \le a$:

$$\int_{r=0}^{a} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \, dr =$$

$$\frac{\rho_0 a}{3}\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) 4\pi r^2 \Big|_{r=0}^{a} = \underline{0}$$

Siden $\vec{E} = 0$ for $r > a$, og $Q_{inn}(r=a) = 0$ må nettoladning for området $0 \to r$, $r > a$ være null. Da $0 \to a$ inneholder 0 nettoladning, må også $a \to r$ inneholde 0 nettoladning. I samsvar med beregnet $\vec{E}$.

Oppgave 2.



Feltenes retning er angitt på figuren. Bruker amperes lov for å finne $\vec{H}_1$ og $\vec{H}_2$. Betrakter en leder av gangen og bruke superposisjonsprinsippet

$$\oint \vec{H}_1 \cdot \vec{dl} = I_{innesluttede}$$

Med valgt integrasjonsvei: $|\vec{H}_1| = \frac{I_1}{2\pi r_1}$

hvor r_1 er avstand fra leder med strøm I_1.

Tilsvarende for H_2: $|\vec{H}_2| = \frac{I_2}{2\pi r_2}$

Utenfor lederne (i x-y planet) er feltene satt opp av leder 1 og 2 i samme retning, innenfor er de motsatt rettet. Absoluttverdien av feltet midt mellom lederne er:

$$H = -|\vec{H}_1|(r = b/2) + |\vec{H}_2|(r = b/2)$$

$$= \frac{I_2 - I_1}{\pi b} = \frac{(5-2)A}{\pi \cdot 0.1m} = 9.55\ A/m$$

Retningen er langs positiv z-retning. Feltet midt mellom lederne er:

$$\underline{\underline{\vec{H}(b/2) = 9.55\ \vec{k}\ A/m}}$$

Magnetfeltet er 0 i en avstand x_1 fra leder 1 gitt ved

$$|\vec{H_2}|(r_2 = b-x_1) - |\vec{H_1}|(r_1 = x_1) = 0$$

Dette gir:

$$\frac{I_2}{2\pi(b-x_1)} - \frac{I_1}{2\pi x_1} = 0$$

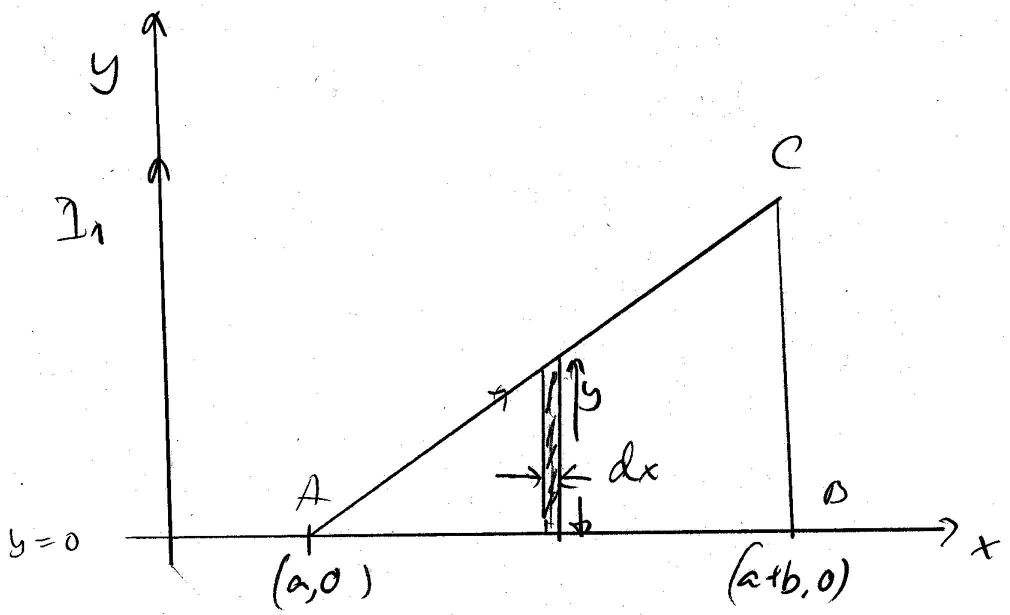
$$x_1 \cdot I_2 - (b-x_1) \cdot I_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{I_1}{I_1+I_2} \cdot b = \frac{2A}{7A} \cdot 0.1m = 2.9cm$$

Linje: $x = 2.9cm$

Magnetfeltet vil ikke være 0 utenfor x-y planet. Dette følger av at det ikke finnes områder utenfor x-y planet hvor retningene på $\vec{H_1}$ og $\vec{H_2}$ er slik at de vil kunne kansellere.

b)



$\vec{H}$ $(\vec{B})$ settes opp av strøm i lederen parallelt y-aksen

$\vec{B}$ er gitt ved:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{e}_\theta$$

hvor $\hat{e}_\theta$ er enhetsvektor i θ-retning (sylinderkoordinater)
I x-y planet er $\vec{B} \perp$ på planet.
$\vec{dA} = dA\,\vec{k} = y\,dx \cdot \vec{k}$ og $\vec{k} \cdot \hat{e}_\theta = 1$ i x-y planet.
Får da:

$$\phi = \iint \vec{B}\,\vec{dA} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_{x=a}^{a+b} \frac{y}{x}\,dx$$

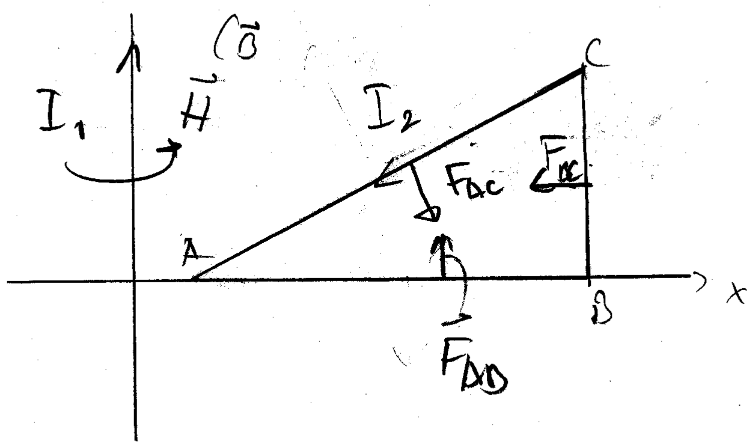
Sammenhengen mellom y og x for linje A − C: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-a)$.

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}} \int_{x=a}^{a+b} \frac{x-a}{x} \cdot dx = \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\cdot\pi} \Big|_{x=a}^{a+b} (x - a\ln x)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\cdot\pi}\left(b - a\cdot\ln(a+b) + a\cdot\ln a\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\cdot\pi}\left(b - a\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)}}$$

ii) Kraft på strømførende leder i magnetfelt $\vec{dF} = I_2\,\vec{dl} \times \vec{B}$



For AC og AB magnetfeltet varierer med x, og vi må integrere uttrykket for å finne $|\vec{F}_{AB}|$ og $|\vec{F}_{AC}|$
(retninger: som vist på fig.)

For AC: $\vec{dl} \perp \vec{B} \Rightarrow \sin\theta = 1$

$$dl = \frac{dx}{\cos 30°}$$

$$|d\vec{F}_{AC}| = dF_{AC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x \cos 30°}$$

$$F_{AC} = \int_{x=a}^{a+b} dF_{AC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos 30°} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos 30°} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} \frac{5 \cdot 10}{\cos 30°} \cdot \ln 11 \ N = \underline{\underline{2.77 \cdot 10^{-5} N}}$$

For A-B: på tilsvarende måte

$$F_{AB} = \int_{x=c}^{a+b} dF_{AB} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$= \underline{\underline{2.40 \cdot 10^{-5} N}}$$

For kraft langs BC: H er konstant langs integrasjonsveien

$$F_{BC} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi (a+b)} \cdot l$$

hvor $l = b \cdot \tan 30°$ (fra fig.)

$$F_{BC} = 2 \cdot 10^{-7} \ 5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{11} \cdot \tan 30° \ N = \underline{\underline{5.26 \cdot 10^{-6} N}}$$

Nettokraft: finnes ved vektor addisjon

$$\vec{F}_{netto} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

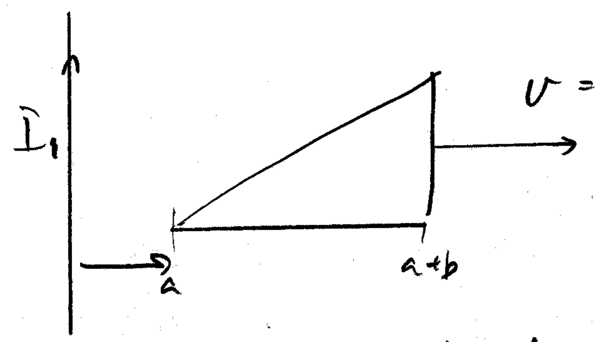
komponenter

$$F_x = -|\vec{F}_{BC}| + |\vec{F}_{AC}| \cdot \cos 60° = 8.65 \cdot 10^{-6} N$$

$$F_y = |F_{AB}| - |\vec{F}_{AC}| \cdot \cos 30° = 0$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_{netto} = 8.65 \cdot 10^{-6} N \ \vec{i}}}$$

c)



$v = \frac{dx}{dt}$

Setter $x = a$ i uttrykket for Φ_B i pkt b):

$$\Phi_B(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}}\left(b - x \cdot \ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right)$$

Indusert $\mathcal{E}$ pga at strømsløyfa forflytter seg (Faradays lov)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\cdot v$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}}\left(-x\,\frac{1}{1+\frac{b}{x}}\left(-\frac{b}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right) v$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}}\left(\frac{b}{x+b} - \ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right)\cdot v$$

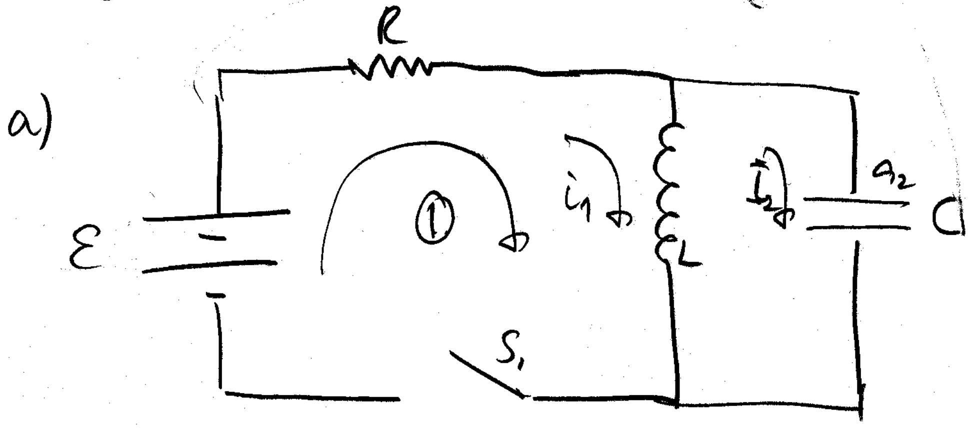
ii) Når $x \to \infty$: $\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x+b} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{b}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \mathcal{E} = 0$$

Oppgave 3.

a)



Velger $\mathcal{E}$ - R - L som første lukkede sløyfe:

$$\mathcal{E} - (I_1 + I_2)\cdot R - L\cdot\frac{dI_1}{dt} = 0$$

Velger $\mathcal{E}$ - R - C som andre lukkede sløyfe:

$$\mathcal{E} - (I_1 + I_2)\cdot R - C\,\frac{dq_2}{dt} = 0$$

(Fortegn: gjennom $\mathcal{E}$: pot. øker, med strøm: pot minker).

Initialverdier:

I_1: når I_1 starter med å øke vil selvinduktansen til L være slik at den motvirker endringen til det som er årsaken. Indusert $\mathcal{E}_{ind}$ vil være motsatt og like stor som påtrykt $\mathcal{E}_{på}$ initielt, $I_1(t=0) = 0$

$I_2(t=0) = \mathcal{E}/R$ (all strøm går til å lade opp kondensator

$q_2(t=0) = 0$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\beta t}\left(\frac{1}{2\omega RC}\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right)$$

$$q_2 = \frac{\mathcal{E}}{\omega R} e^{-\beta t}\cdot\sin\omega t$$

Strømmen I_2 er gitt ved $I_2 = \frac{dq_2}{dt}$

$$I_2 = -\frac{\mathcal{E}\beta}{\omega R} e^{-\beta t}\cdot\sin\omega t + \frac{\mathcal{E}\omega}{\omega R} e^{-\beta t}\cos\omega t$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\beta t}\left(\cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)$$

Innsetting i likningen for kretsen:

$$R\cdot(I_1 + I_2) + L\cdot\frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}$$

$$R\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\beta t}\left(\frac{1}{2\omega RC}\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right)$$

$$+ R\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}\left(e^{-\beta t}\left(\cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)\right)$$

$$+ L\cdot\frac{\mathcal{E}\beta}{R} e^{-\beta t}\left(\frac{1}{2\omega RC}\sin\omega t + \cos\omega t\right)$$

$$- L\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot e^{-\beta t}\left(\frac{\omega}{2\omega RC}\cdot\cos\omega t - \omega\sin\omega t\right) = \mathcal{E}$$

Ordnet med konstantledd, sin, og cos - ledd:

$$1 + e^{-\beta t}\left(-\frac{1}{2\omega RC} - \frac{\beta}{\omega} + \frac{L\cdot\beta}{R}\frac{1}{2\omega RC} + \frac{L\cdot\omega}{R}\right)\cdot\sin\omega t$$

$$+ e^{-\beta t}\left(-1 + 1 + \frac{L}{R}\beta - \frac{L\omega}{R\cdot 2\omega RC}\right)\cdot\cos\omega t = 1$$

Siden løsningen skal være generelt gyldig for alle t må koeffisientene for de tidsvarierende leddene hver for seg være 0:

For cos - leddet:

$$-1+1+\frac{L}{R}\cdot\beta-\frac{L\omega}{R\cdot 2\omega RC}=0$$

Løst med hensyn på β: $\quad \underline{\underline{\beta}} = \frac{L\omega R}{R\cdot 2\omega RC\cdot L} = \underline{\underline{\frac{1}{2RC}}}$

For sin - leddet:

$$-\frac{1}{2\omega RC}-\frac{\beta}{\omega}+\frac{L\beta}{R}\cdot\frac{1}{2\omega RC}+\frac{L\omega}{R}=0$$

$$-\frac{1}{\omega RC}+\frac{L}{R\cdot 2RC\cdot 2\omega RC}+\frac{L\omega}{R}=0$$

$$\frac{L\omega}{R}=\frac{1}{\omega RC}-\frac{L}{R\cdot(2RC)^2\cdot\omega}$$

$$\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{1}{(2RC)^2}$$

$$\underline{\underline{\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{(2RC)^2}}}}$$

Numerisk:

$$\underline{\underline{\beta=\frac{1}{2RC}=80\ s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\beta^2}=40\ s^{-1}}}$$

e) $I_2(t=t_1)=0$ er gitt ved

$$I_2(t_1)=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\beta t_1}\left(\cos\omega t_1-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t_1\right)=0$$

Siden $e^{-\beta t_1}$ går mot 0 kun i grensen for $t_1\to\infty$

Kirchhoff gir igjen:

$$L \cdot \left(\frac{dI_1}{dt} \right) = \frac{q_2}{C}$$

Innsatt med uttrykkene for I_1 og q_2:

$$\frac{L\mathcal{E}}{R}\left(\beta e^{-\beta t}\left(\frac{\sin\omega t}{2\omega RC} + \cos\omega t \right) - e^{-\beta t}\left(\frac{\omega}{2\omega RC} \cdot \cos\omega t - \omega \sin\omega t \right)\right)$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{\omega CR} e^{-\beta t} \cdot \sin\omega t$$

Forkorter med $\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\beta t}$:

$$L \cdot \beta \left(\frac{\sin\omega t}{2\omega RC} + \cos\omega t \right) - L\omega \left(\frac{\cos\omega t}{2\omega RC} - \sin\omega t \right)$$

$$= \frac{\sin\omega t}{\omega C}$$

Ordner sin og cos ledd:

$$\left(\frac{L\beta}{2\omega RC} + L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \sin\omega t + \left(L\beta - \frac{L\omega}{2\omega RC} \right) \cos\omega t = 0$$

Siden dette skal gjelde for alle tider, må koeffisientene for sin og cos-leddene være 0:

For cos leddet:

$$L\beta - \frac{L\omega}{2\omega RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta = \frac{1}{2RC}}$$

For sin leddet:

$$L\omega = \frac{1}{\omega C} - \frac{L}{\omega 2RC} \frac{1}{2RC}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC} \right)^2 = \frac{1}{LC} - \beta^2 \,, \quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2}}$$

er det løsningen av $\cos\omega t_1 - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t_1 = 0$ vi er interessert i. t_1 løses ut fra denne:

I

$$\cos^2\omega t_1 = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \sin^2\omega t_1$$

$$1 = \left(1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2\right)\sin^2\omega t_1$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\beta/\omega)^2}}\right)$$

II

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$$

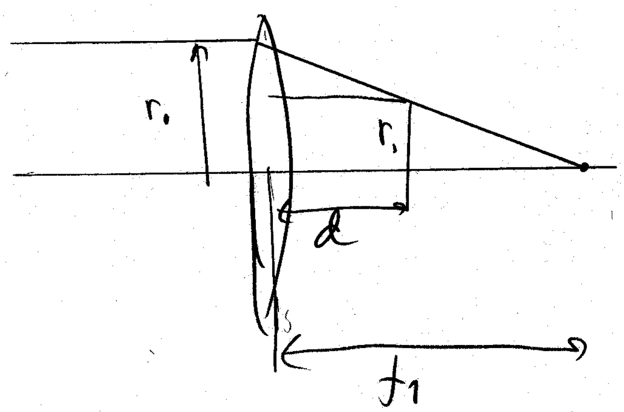
Numerisk:

$$t_1 = \frac{1}{40\,s^{-1}}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.012\,s$$

(Får $t_1 = 0.66\,s$ dersom arcsin uttrykkes i grader)

Oppgave 4

Ved innfallende parallell strålebunt kan mot den konvergerende linsen:



Antar i f_1.

Geometri:
$$\frac{r_1}{f_1 - d} = \frac{r_0}{f_1}$$

$$r_1 = \frac{r_0}{f_1}(f_1 - d) \qquad \text{q.e.d.}$$

a) Ved avbildning i konvergerende linse:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$u_1 \to \infty \quad \Rightarrow \quad v_1 = f_1$$

Objekt for avbildning i divergerende linse har nå en objektavstand

$$u_2 = -(v_1 - d)$$

(negativ pga tegnkonvensjon)

Får da

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{|f_2|}$$

$$\frac{1}{v_2} = -\frac{1}{|f_2|} - \frac{1}{u_2} = -\frac{1}{|f_2|} + \frac{1}{f_1 - d}$$

$$v_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_1 - d} - \frac{1}{|f_2|}} = \underline{\underline{\frac{|f_2|(f_1 - d)}{|f_2| - f_1 + d}}}$$

q.e.d.

b) Fra figuren i oppgaveteksten og i henhold til definisjon av f_{eff}:

$$\frac{f_{eff}}{r_0} = \frac{v_2}{r_1}$$

$$\underline{\underline{f_{eff}}} = \frac{r_0}{r_1} \cdot v_2 = \frac{f_1}{f_1 - d} \cdot \frac{|f_2|(f_1 - d)}{|f_2| - f_1 + d} = \underline{\underline{\frac{f_1 |f_2|}{|f_2| - f_1 + d}}}$$

Numerisk:

$f_1 = 10.0$ cm, $f_2 = -15.0$ cm

d fra 0 til 7.0 cm

Maks feff ved min d:

$$f_{eff,maks} = \underline{\underline{30 \text{ cm}}}$$

Min feff ved maks d:

$$f_{eff,min} = \underline{\underline{12.5 \text{ cm}}}$$

d for feff = 15.0 cm:

$$f_{eff} = \frac{f_1 |f_2|}{|f_2| - f_1 + d} = 15.0 \text{ cm}$$

$$d = \frac{f_1 |f_2|}{f_{eff}} - |f_2| + f_1$$

$$= \underline{\underline{5 \text{ cm}}}$$