NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNINGS FORSLAG EKSAMEN I EMNE SIF4005 FYSIKK
Mandag 7. August 2000 kl. kl. 09.00 – 14.00.

Oppgave 1.

a) Bølgehastighet og retning til de vandrende bølgene beskrevet ved bølgefunksjonene:

$$y_1(x,t) = A\cos[k(x+(34m/s)t)],\; y_2(x,t) = Ae^{k[x-(20m/s)t]},\; y_3(x,t) = BC + \{k[x+(10m/s)t]\}^2$$

finnes ved å se på betingelsene y = konstant. Dette gir:

for y_1 : $k(x+(34m/s)t) = konst$. Deriver med hensyn på t og forkort med k: $\frac{dx}{dt} + 34\,m/s = 0$

$\frac{dx}{xt} = v$ = -34 m/s mot venstre (negativ x)

for y_2: (viser fremgangsmåte hvor vi ser på y_2 direkte, uten å argumentere for at vi kan se på eksponenten):

$$y_2(x,t) = Ae^{k[x-(20m/s)t]} = konst$$

Deriverer med hensyn på t og setter lik 0: $\frac{dy_2}{dt} = Ae^{k[x-(20m/s)t]}\left(k(\frac{dx}{dt} - 20m/s)\right) = 0$

dvs., v = 20 m/s mot høyre (positiv x) for y_2

for y_3:

$$y_3(x,t) = BC + \{k[x+(10m/s)t]\}^2 = konst$$

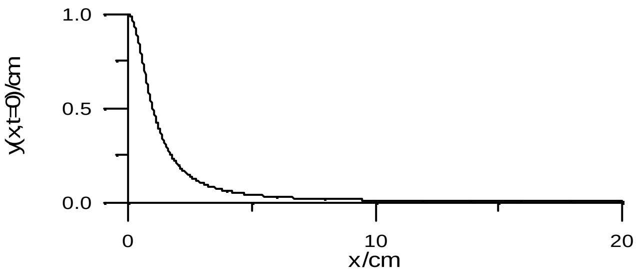
Deriverer med hensyn på t: $\frac{dy_3(x,t)}{dt} = 2\{k[x+(10m/s)t]\}k\left(\frac{dx}{dt} + 10m/s\right) = 0$

v = -10 m/s mot venstre (negativ x) for y_3.

Det er her valgt å vise fremgangsmåten fullt ut for å finne v. Alle tre bølgefunksjonene er av formen $y(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$ (for bølge i positiv x-retning) og bølgehastigheten kan også ses direkte fra denne sammenhengen.

b) Bølgepulsen $y_4(x,t) = \frac{A^3}{A^2 + (x-vt)^2}$, A = 1.0 cm og v = 20 m/s

i)



Den teoretisk grensen for y(x,0) = 0 som funksjon av x er for uendelig stor x.

ii) Ut fra ligningen finner en at maksimum i y inntrer når x=vt. Maksimalverdien er y_{max} = A. For x = x_1 gir dette tiden t_1: $t_1 = x_1 / v = \frac{0.04\,\text{m}}{20\text{m/s}} = 2\cdot 10^{-3}\,\text{s} = 2\,\text{ms}$

Ligningen for utslag redusert til 50% av maks ved x_1, t_2 finnes ved innsetting i $y_4(x,t)$:

$$y_4(x_1,t_2) = \frac{A^3}{A^2 + (x_1 - vt_2)^2} = \frac{A}{2}$$

Dette gir: $\dfrac{1}{1+\left(\frac{x_1-vt_2}{A}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ eller: $x_1 - vt_2 = \pm A$; $t_2 = \dfrac{x_1 \pm A}{v}$

Innsatt med de numeriske tallene fås to løsninger for t_2: 1.5 ms og 2.5 ms. Det er den siste av disse som er > t_1, og svaret er: $\underline{\underline{t_2 = 2.5 \text{ ms}}}$

iii) Differensiallikningen for bølgebevegelse:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Deriverer av y_4 mhp t:

$$\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t}=-\frac{A^3}{\left(A^2+(x-vt)^2\right)^2}2(x-vt)(-v)=\frac{2v(x-vt)A^3}{\left(A^2+(x-vt)^2\right)^2}=\frac{2v(x-vt)}{A^3}y_4{}^2(x,t)$$

og andre-deriverte av y_4 mhp t:

$$\frac{\partial^2 y_4(x,t)}{\partial t^2}=\frac{-2v^2}{A^3}y_4{}^2(x,t)+\frac{4v(x-vt)}{A^3}y_4(x,t)\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t}$$

$$=\frac{-2v^2}{A^3}y_4{}^2(x,t)+\frac{8v^2(x-vt)^2}{A^6}y_4{}^3(x,t)$$

På tilsvarende måte oppnår en for de partiellderiverte mhp x:

$$\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial x}=-\frac{A^3}{\left(A^2+(x-vt)^2\right)^2}2(x-vt)=-\frac{2(x-vt)A^3}{\left(A^2+(x-vt)^2\right)^2}=-\frac{2(x-vt)}{A^3}y_4{}^2(x,t)$$

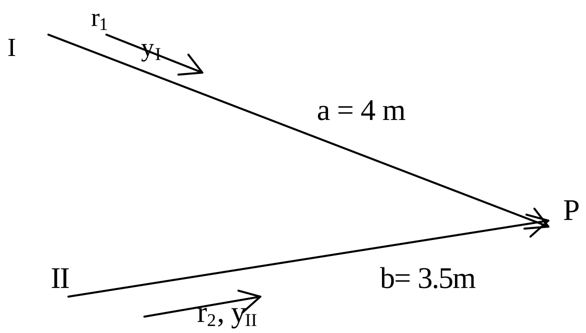
og:

$$\frac{\partial^2 y_4(x,t)}{\partial x^2}=\frac{-2}{A^3}y_4{}^2(x,t)-\frac{4(x-vt)}{A^3}y_4(x,t)\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial x}$$

$$=\frac{-2}{A^3}y_4{}^2(x,t)+\frac{8(x-vt)^2}{A^6}y_4{}^3(x,t)$$

Ved innsetting av disse uttrykkene i differensialligningen ser en at denne er oppfylt av $y_4(x,t)$

c) Situasjonen gir interferens mellom to bølger som skyldes gangveiforskjell:



Angir plassering av høyttalerne ved I og II. Bølgene de sender ut er da gitt ved

$$y_I(r_1,t)=\frac{C_1}{r_1}\sin(w_1 t-k_1 r_1+j_1),\quad y_{II}(r_2,t)=\frac{C_2}{r_2}\sin(w_2 t-k_2 r_2+j_2)$$

Her er det valgt å gi størrelsene i de to bølgene indekser som viser at de gjelder for den angitte bølgen. Imidlertid er flere av disse den samme når samme frekvens sendes fra høyttalerne:

$$w_1=w_2=w=2pf,\quad k_1=k_2=k=\frac{2p}{l},\quad C_1=C_2=C$$

Resultantbølgen i P er gitt ved lineærkombinasjonen av y_1 og y_2: (slik utrykkene er skrevet er retningene på y_1 og y_2 normalt på henholdsvis r_1 og r_2 langs forbindelseslinjen fra hver høyttaler til punktet P. Vi ser bort fra denne forskjellen i retning.)

$$y(P,t)=y_1(r_1,t)+y_2(r_2,t)=C\left(\frac{1}{r_1}\sin\left(\omega t-kr_1+\varphi_1\right)+\frac{1}{r_2}\sin\left(\omega t-kr_2+\varphi_2\right)\right)$$

i) Når høyttalerne blir drevet i motfase, gjelder:

$$\varphi_1=\varphi_2+\pi$$

Bølgen ved P kan da skrives:

$$y(P,t)=y_1(r_1,t)+y_2(r_2,t)=C\left(\frac{1}{r_1}\sin\left(\omega t-kr_1+\varphi_2+\pi\right)+\frac{1}{r_2}\sin\left(\omega t-kr_2+\varphi_2\right)\right)$$

Vi får konstruktiv interferens når gangveiforskjellen mellom avstand til de to kildene for de to bidragene til bølgen ved P tilsvarerer en faseforskjell som er et multiplum av 2π:

$$kr_1-\varphi_2-\pi-(kr_2-\varphi_2)=2\pi n,\ n=0,\pm1,..$$

dvs:

$$k(r_1-r_2)=\pi+2\pi n,\ n=0,\pm1,..;\quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=\pi+2\pi n;\quad (r_1-r_2)=\lambda\left(\tfrac{1}{2}+n\right)$$

Nå er forskjell i avstand r_1-r_2 = 0.5 m, og vi får konstruktiv interferens for følgende f (f = v/λ)

Tab. 1

n	0	1	2	3	4	5
λ	1 m	0.33m	0.2 m	0.143m	0.111m	0.091m
f	343 Hz	1029 Hz	1715 Hz	2401 Hz	3087 Hz	3773 Hz

Betingelsen for destruktiv interferens er at gangveiforskjellen for de to bidragene til bølgen ved P tilsvarerer en faseforskjell som er π pluss et multiplum av 2π:

$$kr_1-\varphi_2-\pi-(kr_2-\varphi_2)=\pi+2\pi n,\ n=0,\pm1,..$$

dvs:

$$k(r_1-r_2)=2\pi n,\ n=0,\pm1,..;\quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=2\pi n;\quad (r_1-r_2)=\lambda n$$

Tab. 2

n	0	1	2	3	4	5
λ	-	0.5m	0.25 m	0.167 m	0.125m	0.1m
f	-	686 Hz	1372 Hz	2058 Hz	2744 Hz	3430 Hz

Legg merke til at amplitudene til de to bidragene til bølgen ved P er dempet med en faktor som er forskjellig for de to bølgene, og de vil derfor ikke fullstendig kansellere hverandre.

ii) Når høyttalerne blir drevet i fase, gjelder $\varphi_1=\varphi_2$. Betingelsen for konstruktiv interferens blir da:

$$kr_1-\varphi_2-(kr_2-\varphi_2)=2\pi n,\ n=0,\pm1,..$$

$$k(r_1-r_2)=2\pi n,\ n=0,\pm1,..;\quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=2\pi n;\quad (r_1-r_2)=\lambda n$$

og vi kjenner dette som det samme som for destruktiv interferens når høyttalerne ble drevet i motfase (oppg. 2a, tab. 2). På tilsvarende måte finner en at betingelsen for destruktiv interferens når høyttalerne blir drevet i fase er det samme som for konstruktiv interferens med pådragene i motfase:

$$kr_1-\varphi_2-(kr_2-\varphi_2)=\pi+2\pi n,\ n=0,\pm1,..$$

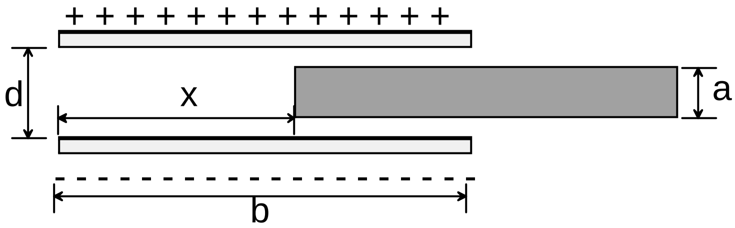
$$k(r_1-r_2)=\pi+2\pi n,\ n=0,\pm1,..;\quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)=\pi+2\pi n;\quad (r_1-r_2)=\lambda\left(\tfrac{1}{2}+n\right)$$

og de numeriske svarene som angitt i Tab. 1.

OPPGAVE 2

Systemet som betraktes (figur til høyre) betraktes som to parallellkoplede platekondensatorer.
C_1 er kapasitansen til den delen uten dielektrisk skive innsatt mellom platene:

$$C_1 = \frac{e_0 xc}{d}$$



og C_2 er kapasitansen for den delen av kondensatoren med dielektrisk skive mellom platene:

$$C_2 = \frac{e\,(b-x)c}{d} = \frac{e_0 K\,(b-x)c}{d}$$

a) Den totale kapasitansen er gitt ved parallellkoplingen av C_1 og C_2:

$$C_{tot} = C_1 + C_2 = \frac{e_0\, xc}{d} + \frac{e_0 K\,(b-x)c}{d} = \frac{e_0\, c}{d}\left(x + K\,(b-x)\right)$$

Gyldighetsområdet er 0<x<b

Oppladet til en ladning Q er kondensatorens energi:

$$U = U(x) = \frac{Q^2}{2C_{tot}(x)} = \frac{1}{[x + K\,(b-x)]}\left(\frac{Q^2 d}{2e_0 c}\right)$$

b) Når vi forskyver klossen et stykke dx vil kondensatorens energi endres:

$$dU = \frac{dU(x)}{dx}\,dx = \frac{K-1}{[x + K(b-x)]^2}\left(\frac{Q^2 d}{2e_0 c}\right)dx$$

Denne energien kommer fra det arbeidet, dW = Fdx, som brukes for å skyve den dielektriske skiven inn platene. Ved å bruke prinsippet om energibevaring må vi ha
$dU + dW = 0$ og innsatt med utrykket for dE, finner en kraften:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{K-1}{[x + K(b-x)]^2}\left(\frac{Q^2 d}{2e_0 c}\right)$$

Siden K>1 vil altså den dielektriske klossen bli forsøkt trukket inn mellom kondensatorplatene. Dette kan forstås som en konsekvens av at det ved polarisering av klossen blir indusert en negativ ladning på oversiden og en like stor positiv ladning på undersiden av klossen jfr. figuren.

c) Koblet til en konstant spenning blir energien til kondensatoren

$$U = U_2(x) = \frac{1}{2}C(x)V^2 = \frac{e_0 c V^2}{2d}\left[x + K(b-x)\right]$$

d) Det er nærliggende å anta at vi også nå har $F(x) = -dE_2(x)/dx$. Dette ville predikere en frastøtende kraft. Men ved nærmere ettertanke innser en at dette ikke er korrekt: Anta først at kondensatoren er frakoblet batteriet og ladet opp til en ladning Q_u slik at spenningen over platene er $V = Q_u / C(x)$. Da er kraften gitt ved ligningen i oppgave b), med $Q \to Q_u$. Hvis vi så kobler til et batteri med spenning V vil det ikke skje noenting med kondensatoren. Kraften må derfor være uforandret:

$$F_2(x) = -\frac{K-1}{[x + K(b-x)]^2}\left(\frac{Q_u^{\,2} d}{2e_0 c}\right) = -\frac{(K-1)e_0 c V^2}{2d}$$

Energiregnskapet i dette tilfellet er at når vi flytter klossen et stykke dx, så vil vi utføre et arbeid:

$$dW = F_2(x)dx = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}\,dx$$

samtidig som kondensatorens energi endrer seg med:

$$dU_2 = \frac{dU_2(x)}{dx} = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx$$

Men i tillegg vil ladningen på kondensatoren endre seg med:

$$dQ = V\frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx$$

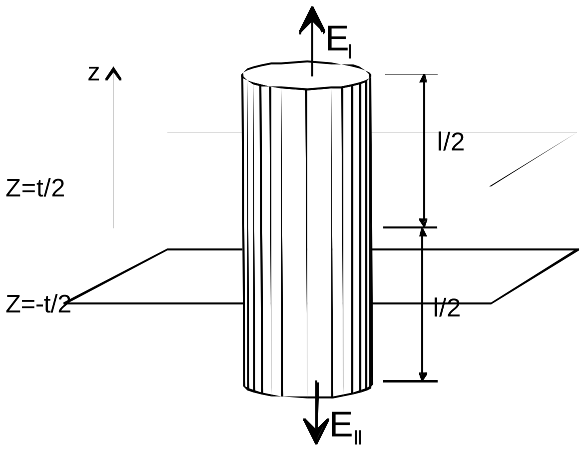
slik at batteriet bidrar med en energi:

$$de = -VdQ = -V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx$$

Bevaring av den totale energien tilsier derfor at:

$$dW + dU_2 + de = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx + \frac{1}{2}V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx - V^2 \frac{dC_{tot}(x)}{dx}dx = 0$$

Oppgave 3



a) Det elektriske feltet utenfor platen |z|> t/2: Retningen på det elektriske feltet er $\vec{E} = E\vec{k}$ på grunn av symmetrien i problemet. Fordi ladningstettheten er symmetrisk om z = 0, vil $|\vec{E}_I| = |\vec{E}_{II}| = E$ når vi er i samme avstand |z| = l/2 fra z=0. Bruker Gauss' lov, med en lukket, sylindrisk Gaussflate med lengde l plassert symmetrisk om z=0 (vist på figuren).

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{inne}/e$$

hvor $e = e_0$ for området utenfor platen (En skal bruke den permitivitet som ligger på Gaussflaten).

For sideflatene er $\vec{E} \perp d\vec{A}$, og $\vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ for denne delen av Gaussflaten. Bidrag til fluksintegralet for de to endeflatene:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2EA,$$

hvor A er arealet på endeflaten. Ladningen innesluttet av den valgte Gaussflaten:

$$Q_{inne} = \int_{z=-t/2}^{z=t/2} A\,r(z)dz = Ar_0 \int_{z=-t/2}^{z=t/2} \cos(\tfrac{pz}{t})dz = Ar_0\frac{t}{p}\left|\sin\left(\frac{pz}{t}\right)\right|_{z=-t/2}^{z=t/2} = 2Ar_0\frac{t}{p}$$

Vi får da for det elektriske feltet utenfor platen |z|> t/2:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{r_0 t}{pe_0}\vec{k} & z > t/2 \\[2ex] -\dfrac{r_0 t}{pe_0}\vec{k} & z < -t/2 \end{cases}$$

Ved beregning av det elektriske feltet inne i platen, |z|<t/2, går vi fram på tilsvarende måte. Valg av Gaussflate og resulterende fluksintegral blir som over. Forskjellen ligger i ulik permitivitet og ladningen innesluttet av den lukkede Gaussflaten:

$$Q_{inne} = \int_{z'=-z}^{z'=z} A\,r(z')dz' = Ar_0\frac{t}{p}\left|\sin\left(\frac{pz'}{t}\right)\right|_{z'=-z}^{z'=z} = \frac{2At}{p}r_0\sin\left(\frac{pz}{t}\right)$$

og feltet blir:

$$\vec{E} = \frac{r_0 t}{pe}\sin\left(\frac{pz}{t}\right)\vec{k}$$

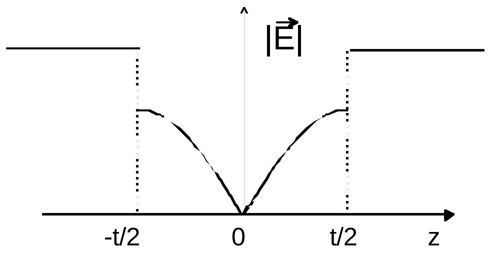
Totalladning per arealenehet:

$$s = \frac{Q_{tot}}{A} = \frac{2Ar_0 t/p}{A} = \frac{2r_0 t}{p}$$

Innsatt i uttrykket for det elektriske feltet utenfor platen (|z|> t/2):

$$\vec{E} = \frac{s}{2e_0}\vec{k} \quad z > t/2$$

og tilsvarende for z <-t/2 (feltet er motsatt rettet i det området).
Dvs., det elektriske feltet avhenger bare av ladningstettheten (som skulle vises)



Skisse av det absoluttverdien til det elektriske feltet: Diskontinuiteten til |E| ved |z|=t/2 skyldes forskjell i permitivitet.

b) Det elektriske potensialet, V, er gitt ved: $V_a - V_b = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}$

og referansen er definert ved V(z=0) = 0. V(z) er symmetrisk om z=0, og beregner V(z) for z>0:

$$V(z) - V(z=0) = -\int_0^z E(z')dz' = -\frac{r_0 t}{pe}\int_0^z \sin\left(\frac{pz'}{t}\right)dz' = \frac{r_0 t}{pe}\frac{t}{p}\left|\cos\left(\frac{pz'}{t}\right)\right|_{z'=0}^{z'=z} = \frac{r_0 t^2}{p^2 e}\left(\cos\left(\frac{pz}{t}\right) - 1\right)$$

På grunn av symmetri blir:

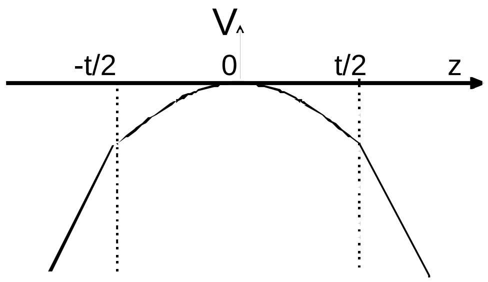
$$V(z) = \frac{r_0 t^2}{p^2 e}\left(\cos\left(\frac{p\,|z|}{t}\right) - 1\right) \quad z<t/2$$

Når V(z) skal beregnes for |z| > t/2, må vi integrere hele avstanden fra z=0 hvor referansen er definert. Utrykket over er gyldig i området 0<|z|<t/2, og vi kan bruke dette direkte i det følgende.

$$V(z) - V(z = t/2) = -\int_{t/2}^{z} E(z')dz' = -\frac{r_0 t}{pe_0}|z'|_{z'=t/2}^{z'=z} = \frac{r_0 t}{pe_0}\left(\frac{t}{2} - z\right)$$

$$V(z) = V(t/2) + \frac{r_0 t}{pe_0}\left(\frac{t}{2} - z\right) = -\frac{r_0 t^2}{p^2 e} + \frac{r_0 t^2}{2pe_0} - \frac{r_0 t}{pe_0}z = \frac{r_0 t^2}{p}\left(\frac{1}{2e_0} - \frac{1}{pe}\right) - \frac{r_0 t}{pe_0}z$$

Figuren viser en skisse av det elektriske potensialet. Legg merke til at det kontinuerlig, men den deriverte (som gir det elektriske feltet) ikke er kontinuerlig ved |z| = t/2.



c) Det elektriske potensialet for |z| >t/2 er på formen:

$$V(z) = A - konst \cdot z \text{ hvor } konst = \frac{r_0 t}{pe_0} = \frac{s}{2e_0}$$

Endring i elektronets potensielle energi fra en avstand z_0 over platen (dvs, fra posisjon z_0+t/2) til t/2 blir da:

$$\Delta U = e\{V(t/2) - V(z_0 + t/2)\} = e \cdot konst \cdot z_0 = \frac{es}{2e_0}z_0$$

Elektronet vil bremse opp og snu, dersom det har en kinetisk energi som tilsvarer denne potensielle energien:

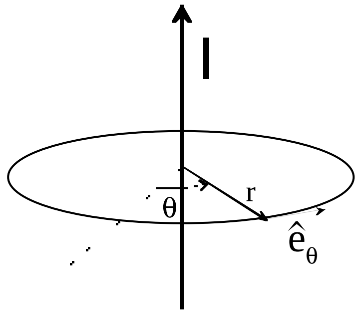
$$\Delta U = \frac{es}{2e_0}z_0 = K = \tfrac{1}{2}m_e v^2$$

Løst med hensyn på hastigheten, og satt inn med numeriske verdier, finner en:

$$v = \left(\frac{es\ z_0}{me_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{-1.62\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot(-1.0\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2})\cdot 0.4\mathrm{m}}{9.11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}}\right)^{1/2} = 8.97\cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

OPPGAVE 4

a) Bruker Ampere's lov til å finne magnefeltet rundt en leder, og bruker så superposisjonsprinsippet for å bestemme den magnetiske feltstyrken ved punktet P.

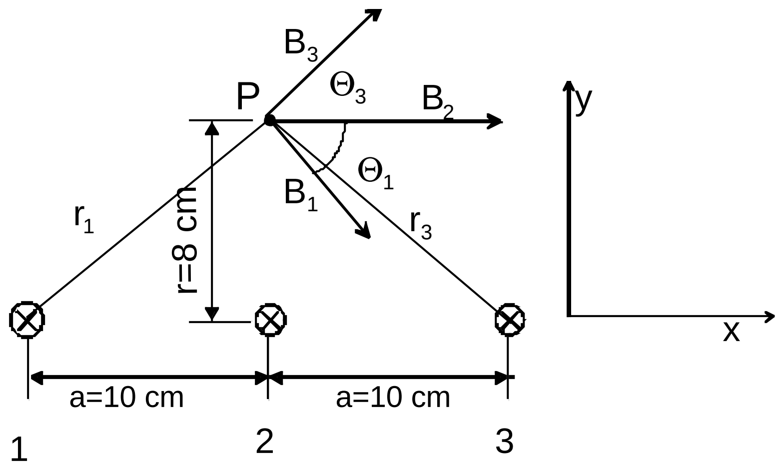


Amperes lov for en leder gir:

$\oint \vec{B}\cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{kryssende}$, hvor vi har brukt at det er luft/vakuum i området.
For en uendelig lang leder velger vi en integrasjonssti som en konsentrisk sirkel med radius r om lederen. Retningen på magnetfeltet er den samme som θ i figuren. Da er $\vec{B} \parallel \vec{dl}$, som gir at $\vec{B}\cdot\vec{dl} = B\,dl$.
Innsatt i Amperes lov får vi da:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B\oint dl = B\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,d\theta = 2\pi r B = \mu_0 I_{kryssende}$$

Magnetfeltet i en avstand r fra en uendelig lang leder er dermed: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{e}_\theta$, hvor $\hat{e}_\theta$ er enhetsvektor i θ-retning. Situasjonen med de tre magnetfeltet satt opp av de tre lederne er nå vist i figuren:



Det er lagt inn et koordinatsystem, og de tre lederne er angitt med nummer 1, 2 og 3 med avstand r_1, r, og r_3 til punktet P. Magnetfeltet i P fra hver av lederne er angitt ved B_1, B_2 og B_3 med retninger som vist i figuren. Denne viser at vertikal (y) komponentene av B_1 og B_3 er like store og motsatt rettet. Vektorsummeringen av de tre bidragene til magnetfeltet gir dermed at B er rettet langs positiv x akse (til høyre på figur), og er gitt ved:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_2 + |\vec{B}_1|\cos\theta_1\,\vec{i} + |\vec{B}_3|\cos\theta_3\,\vec{i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos\theta_1}{r_1} + \frac{\cos\theta_3}{r_3}\right)\vec{i}$$

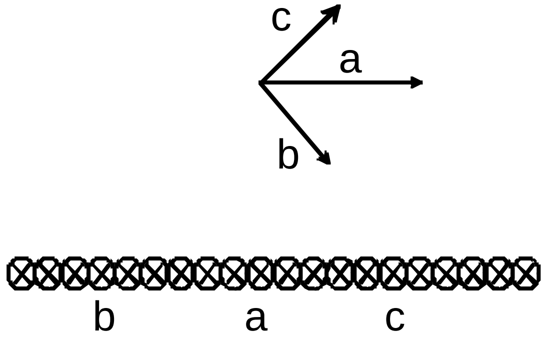
Nå er $\cos\theta_1 = r/r_1$, $\cos\theta_3 = r/r_3$, og r_1=r_3 på grunn av symmetri. Dette gir:

$$\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{r_1}\cos\theta_1 + \frac{r}{r_3}\cos\theta_3\right)\vec{i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{r_1}\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_3}\frac{r}{r_3}\right)\vec{i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 + 2(r/r_1)^2\right)\vec{i}$$

Innsatt med numeriske tall finner en magnetfeltstyrken i punktet P:

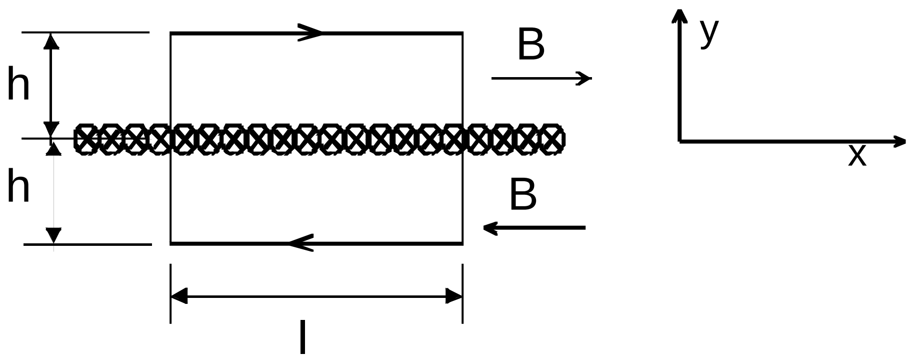
$$\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 + 2(r/r_1)^2\right)\vec{i} = \frac{4\pi 10^{-7}\,(Tm/A)\;3A}{2\pi\cdot 0.08m}\left(1 + 2\frac{8^2}{10^2+8^2}\right)\vec{i} = 1.34\cdot 10^{-5}\,T\,\vec{i}$$

b) Illustrasjon av tverrsnitt til strømførende plan:
Bidraget til magnetfeltet i et punkt p: for lederen plassert under normalen er retningen på B parallelt planet. Dette er illustrert ved leder a, og retning angitt ved a. For ledere b vil det være en komponent av magnetfeltet normalt på planet, men vi kan finne en leder (c i figur) som gir et like stort, men motsatt rettet bidrag til det totale



magnetfeltet normalt på planet. Dette gjelder for vilkårlig valg av leder b. Dette fører til at det er ingen nettokomponent av $\vec{B} \perp$ planet. Bruk av Amperes lov viser at B er uavhengig av avstand fra planet, dvs., magnetfeltet er homogent.

Bruker Ampers lov for å bestemme $\vec{B}$:



Velger integrasjonsvei som et rektangel med sider som enten er || eller ⊥ på det strømførende plan, slik figuren illustrerer. Dette fører til at langsidene (l) er || $\vec{B}$, og kortsidene (lengde 2h) $\perp \vec{B}$. Retningen på magnetfeltet er motsatt over og under det strømførende planet. Amperes lov gir:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{2\,sidekanter} \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_{2\,langsider} \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2lB = m_0 I_{kryssende} = m_0 n_l l I$$

hvor n_l antall ledere pr lengdeenhet, og n_l l er antall ledere som er inne i rektangelet. For magnetfeltet i en hvilken som helst avstand fra planet finner en da:

$$|\vec{B}| = \frac{m_0 n_l I}{2} = \frac{4p \cdot 10^{-7}(Tm/A)1000\,m^{-1}\,10A}{2} = 6.23\cdot 10^{-3}\,T$$

c) I følge Lenz lov, vil retningen på den induserte strømmen i sløyfa være mot klokka.
Vi bruker Faradays lov for å beregne indusert elektromotorisk kraft. Magnetisk fluks gjennom sløyfa er:

$$\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot\vec{dA} = \iint B\,dA\cos(\tfrac{p}{2} - b)$$

Siden B er uavhengig av avstand fra det strømførende planet oppnås:

$$\Phi_B = B\cos(\tfrac{p}{2} - b)\iint dA = B\cos(\tfrac{p}{2} - b)A = B\cos(\tfrac{p}{2} - b)ab$$

hvor A er arealet, A = ab, a er sidekanter DA og lik 0.2m, og b sidekant AB og lik 0.1m. Innsatt med uttrykket for B (fra 4b) og oppgitt uttrykk for I, får en:

$$\Phi_B = \frac{m_0 n_l}{2} I_0 (1 - at)ab\sin b$$

Bruk av Faradays lov gir:

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = a m_0 \frac{n_l}{2} I_0 ab\sin b$$

Den induserte e.m.s'en setter opp en strøm i følge Ohm's lov (med retning mot klokka på fig i oppgaven):

$$I_{ind} = \frac{e}{R} = a m_0 \frac{n_l}{2R} I_0 ab\sin b$$

α er da gitt ved:

$$a = \frac{2RI_{ind}}{m_0 n_l I_0 ab\sin b} = \frac{2\cdot 2\Omega\, 0.2\cdot 10^{-3}A}{4p\cdot 10^{-7}(Tm/A)1000\,m^{-1}10A\,0.2m\,0.1m\sin 30} = 6.3 s^{-1}$$

$\underline{\underline{\alpha = 6.3\ s^{-1}}}$

d) Situasjonen tilsier superponering av magnetfeltet fra en uendelig lang rett leder i en avstand b (dette er regnet ut i oppgave 4a), samt magnetfeltet i senter av samme plan som en sirkulær leder i et plan. Magnetfeltet i senter av den sirkulær lederens plan finnes ved bruk av Biot-Savarts lov:

$$\vec{B} = \frac{m_0}{4p} \int \frac{I\, \vec{dl} \times \vec{e_r}}{r^2}$$

hvor r er avstanden fra strømelementet Idl til sentrum av sirkelen (hvor magnetfeltet beregnes), og e_r er enhetsvektoren for denne. Anvendt på sirkelen oppnås:

$$|\vec{B}| = \frac{m_0}{4p} \frac{I}{R^2} 2pR = \frac{m_0}{2} \frac{I}{R}$$

Magnetfeltet i P er dermed gitt ved:

$$|\vec{B}(P)| = m_0 I \left(\frac{1}{2pb} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a} \right)$$

hvor det er brukt positiv retning ut av papirplanet i figuren i oppgaveteksten.
Magnetfeltet vil være null i punkt P for følgende forhold mellom a og b:

$$|\vec{B}(P)| = \frac{m_0 I}{2} \left(\frac{1}{pb} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 0\,, \Rightarrow \quad \frac{1}{pb} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 0$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{p} + 1 \right) = \frac{1}{a}\,, \qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + 1 \right)} = \frac{p}{1+p} \approx 0.7585$$