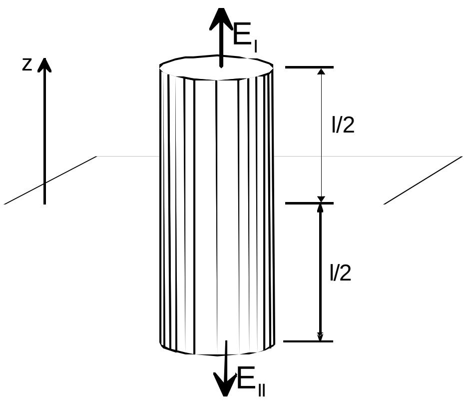
LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I EMNE SIF4005 FYSIKK

For kjemi og materialteknologi Onsdag 6. august 2001 kl. 09.00 – 14.00.

Oppgave 1.



a) Det elektriske feltet rundt en uendelig stor plate finnes ved å bruke Gauss lov. Retningen på det elektriske feltet er $\vec{E} = E\,\vec{k}$ på grunn av symmetrien i problemet, og $|\vec{E}_I| = |\vec{E}_{II}| = E$ når vi er i samme avstand |z| = l/2 fra z=0. Bruker Gauss' lov, med en lukket, sylindrisk Gaussflate med lengde l plassert symmetrisk om z=0 (vist på figuren).

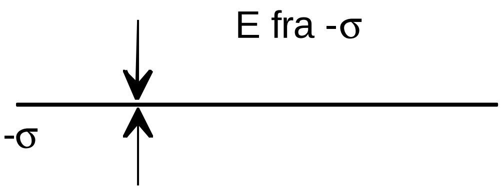
$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dA} = Q_{inne} / e$$

hvor $e = e_0$ for området utenfor platen. For sideflatene er $\vec{E} \perp \vec{dA}$, og $\vec{E} \cdot \vec{dA} = 0$ for denne delen av Gaussflaten. Bidrag til fluksintegralet for de to endeflatene:

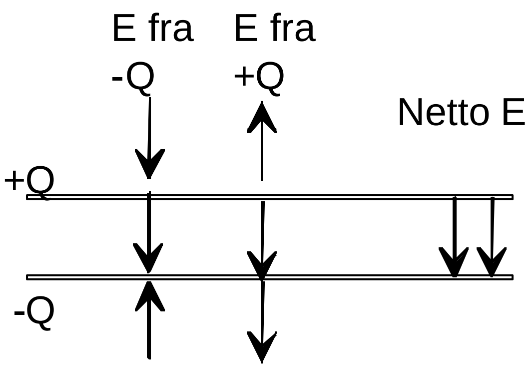
$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dA} = 2E\,A,$$

hvor A er arealet på endeflaten. Ladningen innesluttet av den valgte Gaussflaten: $Q_{inne} = sA$

Vi får da for det elektriske feltet for en plate: $\vec{E} = \frac{s}{2e_0}\vec{k}$ Q.E.D.



Figuren til venstre viser retningen på det elektriske feltet når σ er negativ. Retningen finnes ved å se på kraftvirkningen på en tenkt positiv testladning.



b) Det elektriske feltet mellom de to platene i kondensatoren finnes ved å betrakte feltene fra de to platene, og se på resultanten. Figuren til venstre viser situasjonen, med like lang lengde på vektorene som representerer E. Legg spesielt merke til at bidragene fra de positivt og negativt ladede platene er motsatt rettet i området utenfor kondensatoren og dermed gir null nettofelt i disse områdene. Mellom platene er det elektriske feltet:

$$\vec{E} = -2\frac{s}{2e_0}\vec{k} = -\frac{s}{e_0}\vec{k}$$

(hvor vi har antatt at den positivt ladede platen ligger over den negativt ladede, og at positiv z-akse er oppover arket). Det elektriske feltet mellom platene er:

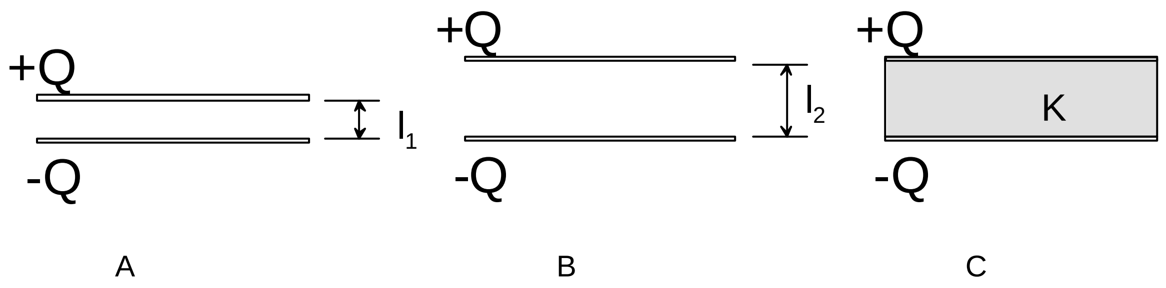
$$|E| = V / l_1 = \frac{200\,\mathrm{V}}{0.003\,\mathrm{m}} = 66.7\,\mathrm{kV/m}$$

Det elektriske feltet utenfor (over/under) platene er null (se fig. over).

Kapasitansen til platekondensatoren er:

$$C = C_1 = e_0 \frac{A}{l_1} = e_0 \frac{a \cdot b}{l_1} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \frac{0.1 \cdot 0.5 \mathrm{m}^2}{3.0 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}} = 1.475 \cdot 10^{-10} \mathrm{F}$$

c) Endringen i kondensatoren kan illustreres ved følgende figur:



I (A) blir kondensatoren ladet opp, og får ladningen Q på hver av platene. Den elektromotoriske kraften som er brukt for å lade opp kondensatoren blir så koplet i fra, og avstanden mellom platene endres fra l_1 til l_2 (A ->B). Siden den elektromotoriske kraften er frakoplet, innebærer det at dette skjer med bevaring av ladning på kondensatorplatene (Q er den samme i (B) som i (A).). Etter at det dielektriske materialet er satt inn, er situasjonen som, vist i C, og det elektriske potensialet over platene i denne situasjonen, V_2, er 10 % av V_1, det elektriske potensialet i situasjonen vist i (A). K skal bestemmes.
Kapisitansene i situasjonen (A) og (C) er gitt ved:

$$C_1 = \frac{Q}{V_1}, \qquad C_2 = \frac{Q}{V_2}$$

Nå tilsier observasjonen $V_2 = 0.1\ V_1$

$$C_2 = \frac{Q}{V_2} = \frac{Q}{0.1 \cdot V_1} = 10 \frac{Q}{V_1} = 10 C_1$$

Uttrykt ved geometrien til parallell plate kondensatoren;

$$C_2 = e \frac{A}{l_2} = e_0 K \frac{A}{2 \cdot l_1} = \frac{K}{2} e_0 \frac{A}{l_1} = \frac{K}{2} C_1$$

Sammenholdt gir dette

$$\frac{K}{2} = 10; \qquad K = 20$$

d) Vi betrakter situasjonen som parallellkopling mellom to kondensatorer C_3 og C_4, hvor C_3 er den delen som har luft mellom platene, og C_4 den delen som har væske (med K = 35) mellom platene.

Ligning for parallellkopling av kondensatorer gir:

$$C_{tot} = C_3 + C_4$$

Uttrykker C_3 og C_4 ved geometrien

$$C_3 = e_0 \frac{a \cdot (b - x)}{l_1}$$

$$C_4 = e \frac{a \cdot x}{l_1} = e_0 K \frac{a \cdot x}{l_1}$$

Innsatt i ligning for den totale kapasitans for en:

$$C_{tot} = C_3 + C_4 = e_0 \frac{a \cdot (b - x)}{l_1} + e_0 K \frac{a \cdot x}{l_1} = e_0 \frac{a}{l_1}\big((b - x) + Kx\big) = e_0 \frac{a \cdot b}{l_1}\big((1 - \tfrac{x}{b}) + K \tfrac{x}{b}\big)$$

$$= C_0 \left(1 + \frac{x}{b}(K - 1)\right)$$

hvor C_0 er kapasitansen beregnet i oppgave a).

Væskenivå ved 10X økning av C: C_{tot} = 10 C_0 tilsvarer at x er gitt ved:

$$C_{tot} = C_0\left(1+\frac{x}{b}(K-1)\right) = 10\,C_0$$

$$x = b\frac{10-1}{K-1} = 50\,\text{cm}\,\frac{9}{35-1} = 13.24\,\text{cm}$$

Dvs., væskenivået er 13.24 cm over nedre kant av kondensatoren, eller 16.24 cm over bunnen av karet.

OPPGAVE 2

Strømtettheten er gitt ved:

$$\vec{J}(r) = \frac{2I_0}{p(b^4-a^4)} r^2 \vec{k} \qquad \text{for} \quad a \le r \le b$$

$$\vec{J}(r) = 0 \qquad \text{ellers.}$$

a) Total strøm som går i lederen:

$$I_{tot} = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int_{r=a}^{b} \frac{2I_0\, r^2}{p\left(b^4-a^4\right)} 2prdr = \frac{4I_0}{b^4-a^4}\int_{r=a}^{b} r^3 dr = \frac{4I_0}{b^4-a^4}\frac{1}{4} r^4\Big|_a^b = \frac{I_0}{b^4-a^4}(b^4-a^4) = I_0$$

Andel av den totale strømmen for r ≤ 4.6 mm = r_c, finnes ved å bruke samme framgangsmåte som for I_{tot} men integrerer til r_c som øvre grense, og så dele på den totale strømmen. Dette gir:

Andel av total strøm for r ≤ 4.6 mm:

$$\frac{1}{I_0}\int_{r=a}^{r_c} \frac{2I_0\, r^2}{p\left(b^4-a^4\right)} 2prdr = \frac{r_c^{\,4}-a^4}{b^4-a^4} = \frac{4.6^4-4^4}{5^4-4^4} = 0.520$$

52.0% av strømmen er i lederen for r ≤ 4.6 mm.

b) Amperes lov brukes for å beregne magnetfeltet:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = m_0 I_{innenfor}$$

Velger en integrasjonsvei som er en sirkel med samme sentrum som sylinderen, med radius r. Magnetfeltet er tangentielt til denne integrasjonsveien. Da er:

$\vec{B} = B\hat{e}_q$, $\quad d\vec{l} = rdq\,\hat{e}_q$ hvor $\hat{e}_q$ er enhetsvektor i θ -retning.

For venstre side av Amperes lov, får vi:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2prB$$

For høyre side av Amperes lov får vi

$$m_0 I_{inne} = m_0 \int_{r=a}^{r} \frac{2I_0\, r^2}{p\left(b^4-a^4\right)} 2prdr = \frac{m_0 I_0 (r^4-a^4)}{b^4-a^4}$$

og for magnetfeltet B oppnås:

$$\vec{B} = \frac{m_0 I_0}{2pr} \frac{(r^4 - a^4)}{(b^4 - a^4)} \hat{e}_q \quad \text{for a<r<b}$$

For r<a er: $\quad I_{innenfor} = 0$
og for r>b er: $\quad I_{innenfor} = I_0$
Oppsummert:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & for\, r < a \\ \dfrac{m_0 I_0}{2pr} \dfrac{(r^4 - a^4)}{(b^4 - a^4)} \hat{e}_q & for\, a < r < b \\ \dfrac{m_0 I_0}{2pr} \hat{e}_q & for \quad r > b \end{cases}$$

Magnetfeltet i en avstand r=4.8 mm fra sentrum av lederen, når den totale strømmen er 3 A er:

$$|\vec{B}| = B(r = 4.8mm, I_0 = 3A) = \frac{m_0 I_0}{2pr} \frac{(r^4 - a^4)}{(b^4 - a^4)} = \frac{4p \cdot 10^{-7} TmA^{-1} 3.0A}{2p\ 4.8 \cdot 10^{-3} m} \frac{(4.8^4 - 4^4)}{(5^4 - 4^4)} = 9.31 \cdot 10^{-5} T$$

c) Siden $\vec{B}(r > b) = 0$ for koaksialkabelen må $I_{innenfor}$ i følge Amperes lov for situasjonen r>b gi $I_{innenfor} = 0$. Da $I_{innenfor}$ var like I_0 for ytre sylinder, må indre sylinder føre en like stor og motsatt rettet strøm. Denne er homogent fordelt over det sirkulære tverrsnittet, og strømtettheten er da gitt ved:

$$\vec{J} = -\frac{I_0}{pc^2} \vec{k} = -4.24 \cdot 10^5\, Am^{-2}\, \vec{k}$$

d) Bruk av Amperes lov for bestemmelse av magnetfeltet for koaksialkabelen gir:

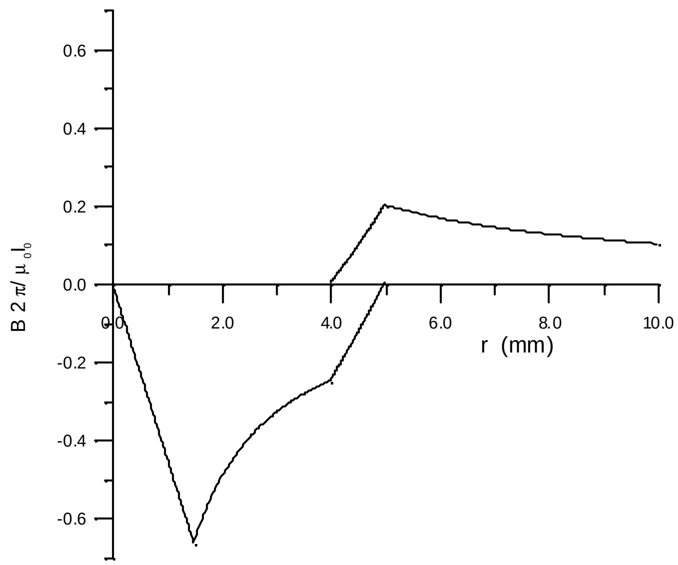
$$\vec{B} = -\frac{m_0 I_0}{2pr} \frac{r^2}{c^2} \hat{e}_q \qquad \text{r<c}$$

$$\vec{B} = -\frac{m_0 I_0}{2pr} \hat{e}_q \qquad \text{c<r<a}$$

$$\vec{B} = -\frac{m_0 I_0}{2pr} \left(1 - \frac{r^4 - a^4}{b^4 - a^4} \right) \hat{e}_q \qquad \text{a<r<b}$$

$$\vec{B} = 0 \qquad \text{b<r}$$

Figuren til høyre viser magnetfeltet for spørsmål d) (nedre del) og b) (øvre del).



Oppgave 3

a) Frekvensen, f, til de udempede svingningene er f = 100 svingn./min.
Vinkelfrekvensen blir da:

$$\omega = 2\pi\ f = 2\pi \frac{100}{60s} = 10.47\, s^{-1}$$

b) Vinkelfrekvensen til de dempede svingningene er:

$$\omega = 2\pi\ f = 2\pi \frac{99}{60s} = 10.36\, s^{-1}$$

c) Differensiallikningen for bevegelsen finnes ved å bruke Newtons 2. lov: Nettokraft ulik 0 resulterer i akselerasjon (av kulen med masse m):

$$F_{netto} = F_{fjær} + F_{viskøs} = -kx - bv = ma$$

Innsetting av uttrykkene for v og a, og ordning av ligningen gir:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0; \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + 6\pi\eta r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

I den siste ligningen har vi satt inn uttrykket for b; $b = 6\pi\eta r$. Løsningen er på formen:

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

hvor innsetting i differensial ligningen gir oss sammenheng mellom γ og ω', og størrelsene b,m og k:

$$\gamma = \frac{b}{2m}; \qquad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\text{, hvor } \omega = \sqrt{k/m}$$

Startbetingelsene:

Posisjon: $x(t=0) = A_0 = A\cos(\varphi)$

Hastighet: $v(t=0) = 0$

Setter inn i den generelle løsningen for x:

$$v(t) = Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\cos(\omega' t + \varphi) - \omega'\sin(\omega' t + \varphi)\right)$$

$$v(t=0) = A\left(-\gamma\cos(\varphi) - \omega'\sin(\varphi)\right) = 0$$

Dette gir: $\tan(\varphi) = -\dfrac{\gamma}{\omega'}$; og $A = \dfrac{A_0}{\cos(\varphi)}$

For å vise at $A = A_0\,\omega/\omega'$ bruker vi det siste utrykket, og uttrykker cos(φ) ved tan(φ):

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{\gamma}{\omega'}\right)^2}} = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \gamma^2}}$$

Innsetting av uttrykket for $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ i dette uttrykket for cos(φ) gir:

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \gamma^2}} = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2 + \gamma^2}} = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{\omega'}{\omega}$$

For da:

$$A = \frac{A_0}{\cos(\varphi)} = A_0\frac{\omega}{\omega'}; \quad \text{q.e.d.}$$

d) Sammenhengen mellom b og viskositeten er: $b = 6\pi\eta r$. Parameter b finnes fra de observerte vinkelfrekvenser ω og ω' og sammenhengen mellom b og γ:

$$\gamma = \frac{b}{2m}; \quad \text{omformet: } b = 2m\gamma$$

Innsatt i uttrykket for viskositeten: $\eta = \dfrac{2m\gamma}{6\pi r} = \dfrac{2m}{6\pi r}\sqrt{\omega^2 - \omega'^2}$

Her er ω og ω' kjent (oppgave 3a og b), og massen m regnes ut fra gitt spesifikk vekt til materialet i kulen:

$$m = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho = 3.26 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}$$

Innsatt med de numeriske tall:

$$b = 2m\gamma = 2 \cdot 3.26 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot \sqrt{10.47^2 - 10.36^2}\,s^{-1} = 9.41 \cdot 10^{-2}\,kg\,s^{-1}$$

$$\eta = \frac{2m}{6\pi r}\sqrt{\omega^2 - \omega'^2} = 0.523\,\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}} = \underline{0.523\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}}$$

e) Vi har funnet følgende relasjoner for fasevinkelen φ:

$$\tan(\varphi) = -\frac{\gamma}{\omega'} \;\; ; \;\; \cos(\varphi) = \frac{\omega'}{\omega}$$

Siden tan(φ) = sin(φ)/cos(φ); har vi også: $\sin(\varphi) = \dfrac{-\gamma}{\omega}$.

Vi hadde tidligere funnet følgende uttrykk for v(t):

$$v(t) = Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\cos(\omega' t + \varphi) - \omega'\sin(\omega' t + \varphi)\right)$$

Multipliserer høyre side med ω/ω = 1, og trekker en ω inn i parentesen:

$$v(t) = -\omega Ae^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma}{\omega}\cos(\omega' t + \varphi) + \frac{\omega'}{\omega}\sin(\omega' t + \varphi)\right)$$

Bruker nå uttrykkene for fasevinkelen, og erstatter leddene γ/ω og ω'/ω:

$$v(t) = -\omega Ae^{-\gamma t}\left(-\sin(\varphi)\cos(\omega' t + \varphi) + \cos(\varphi)\sin(\omega' t + \varphi)\right)$$

Dette er en form som kan kjennes igjen fra den trigonometrisk relasjonen: $\sin(a - b)$

$$v(t) = -\omega Ae^{-\gamma t}\left(\sin(\omega' t + \varphi - \varphi)\right) = \underline{-\omega Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t)} \quad \text{q.e.d.}$$

f) Kritisk demping inntrer når: $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = 0$. Dvs., $\gamma_{krit} = \omega = 10.47\,s^{-1}$

Dette tilsvarer en viskositet på:

$$\eta = \frac{2m\gamma}{6\pi r} = 3.63\,\tfrac{kg}{ms} = \underline{3.63\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}}$$