Løsningsforslag Eksamen SIF4005 Fysikk
11.desember 2002

Oppgave 1. Elektrostatikk

a) Gauss lov: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_o}$

E(r) for r≤R:
Kula er ledende og da er $Q_{inne} = 0$ for r<R.
All ladning Q er på overflaten av kula.
Det elektriske feltet E=0 for r<R.

E(r) for r≥R
$Q_{inne}=Q$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}}}$$

b) Kula er ikke ledende med ladningsfordeling $\rho = Ar^2$

Den totale ladningen over hele kula er Q. Kan da bestemme A uttrykt ved Q:

$$Q = \iiint \rho(r) dV = \int_0^R Ar^2 \cdot 4\pi r^2 dr = A \cdot 4\pi \frac{1}{5} R^5$$

$$A = \frac{5Q}{4\pi R^5}$$

For r≤R er Q_{inne}:

$$Q_{inne} = \iiint \rho(r) dV = \int_0^r Ar^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{5Q}{4\pi R^5} 4\pi \frac{1}{5} r^5 = Q \frac{r^5}{R^5}$$

Fra Gauss lov kan da elektriske feltet E (r) bestemmes for r≤R:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \frac{r^5}{R^5}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{Q \cdot r^3}{4\pi\varepsilon_o R^5}}}$$

For r≥R er $Q_{inne}=Q$:

Det elektriske feltet E(r) er da det samme som for den ledende kula:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}}}$$

<u>Det elektriske feltet for r=R:</u>

Fra utrykket for E for r<R får vi $E = \frac{Q\cdot r^3}{4\pi\varepsilon_o R^5} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}}}$

Fra utrykket for E for r>R får vi $E = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}}}$

Dvs at E(r) er kontinuerlig for r=R.

c) Det elektriske potensialet langs veien r mellom punktene a og b er gitt ved:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

<u>For den ledende kula og r≥R</u> er V(r):

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(0+\frac{1}{r}\right) = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}}}$$

<u>For den ledende kula og r≤R</u> er V(r):

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^R 0\cdot dr + \int_R^\infty E\cdot dr = V(R)$$

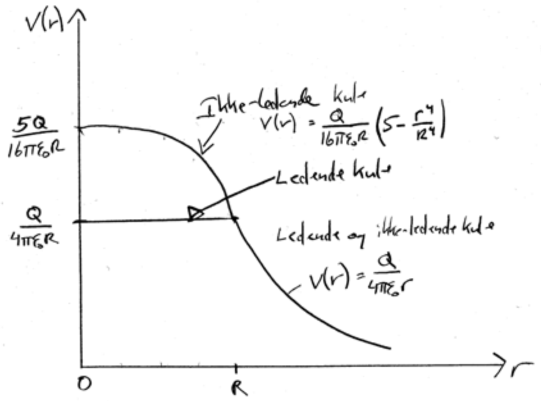
$$\underline{\underline{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}}}$$

Det elektriske potensialet inne i kula er lik potensialet på overflaten av den ledende kula da E=0 inne i kula.

<u>For den ikke ledende kula og r≥R</u> er det elektriske feltet lik feltet for den ledende kula. Det elektriske potensialet blir derfor det samme.

$$V(r) = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}}}$$

<u>For den ikke-ledende kula og r≤R</u> er V(r):

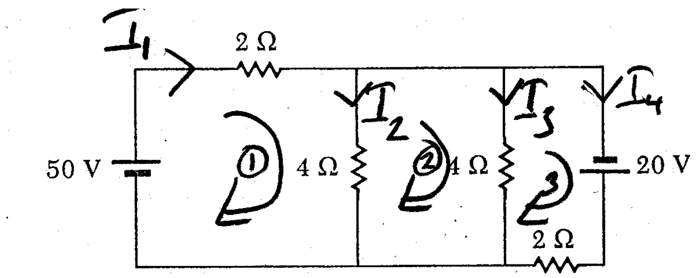


$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^5}\frac{r^4}{4}\Bigg|_r^R + V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{R^4}{4R^5} - \frac{r^4}{4R^5} + \frac{1}{R}\right)$$

For ledende kule er V(r) konstant inne i kula og lik V(R) på kulas overflate. For ikke-ledende kule avtar V(r) inne i kula. V er maksimalt i r=0.
V(r) er den samme utenfor ledende og ikke-ledende kule fordi E(r) er det samme utenfor begge kulene.

Oppgave 2. Elektriske krets. Magnetisme

a) Velger strømretning som vist på figuren. Velger slyngeretning med klokka.



Slynge 1) $50V - I_1 \cdot 2\Omega - I_2 \cdot 4\Omega = 0$

Slynge 2) $I_3 \cdot 4\Omega - I_2 \cdot 4\Omega = 0$
$I_2 = I_3$

Slynge 3) $20V - I_4 \cdot 2\Omega + I_3 \cdot 4\Omega = 0$

Knutepunkt regelen:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$
$$I_4 = I_1 - 2I_2$$

Slynge 3) $\begin{aligned} &20V - (I_1 - 2I_2)\cdot 2\Omega + I_2 \cdot 4\Omega = 0 \\ &50V - I_1 \cdot 5\Omega + I_2 \cdot 20\Omega = 0 \end{aligned}$ (multiplisert med 2,5)

Subtraherer slynge 3 og slynge 1: $\begin{aligned} &0 - I_1 \cdot 3\Omega + I_2 \cdot 24\Omega = 0 \\ &I_1 = 8I_2 \end{aligned}$

I slynge 1 setter inn for I_1: $\begin{aligned} &50V - 8I_2 \cdot 2\Omega - I_2 \cdot 4\Omega = 0 \\ &\underline{\underline{I_2 = 2,5A}} \end{aligned}$

$$\underline{\underline{I_3 = I_2 = 2,5A}}$$
$$I_1 = 8I_1 = \underline{\underline{20,0A}}$$
$$I_4 = I_1 - 2I_2 = 20,0A - 2\cdot 2,5A = \underline{\underline{15,0A}}$$

Effekttap i motstanden 2Ω med strøm I_1:

$$P_1 = I_1^2 \cdot 2\Omega = (20,0A)^2 \cdot 2\Omega = \underline{\underline{800W}}$$

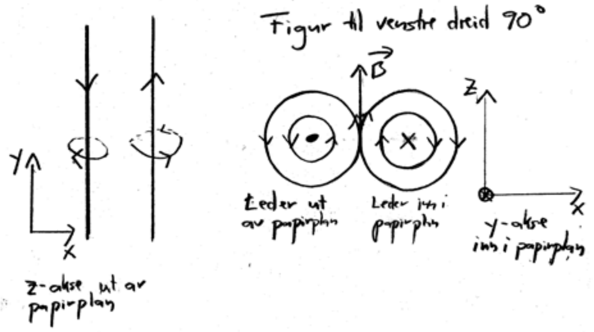
Effekttap i de to motstandene 4Ω med strøm I_2 og I_3:

$$P_2 = I_2^2 \cdot 4\Omega = (2,5A)^2 \cdot 4\Omega = \underline{\underline{25W}}$$

Effekttap i motsatnden 2Ω med strøm I_4:

$$P_4 = I_4^2 \cdot 2\Omega = (15A)^2 \cdot 2\Omega = \underline{\underline{450W}}$$

b) De magnetiske feltlinjene rundt de to rettlinjete lederne er vist på figuren under:



Magnetfeltet i avstand r fra en rettlinjet uendelig lang leder er gitt av Amperes lov:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o I_{innenfor}$$

Antar at vi kan bruke Amperes lov selv om lederene ikke er uendelige.
$I_{innenfor}$ =I og den lukkete integrasjonsirkelen 2πr.
Det magnetiske feltet B har størrelsen:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

Størrelsen av magnetfeltet midt mellom de to lederne r=0,5mm finnes ved å bruke superposisjonsprinsippet:

$$B_{tot} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi r} + \frac{\mu_o I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\frac{H}{m}\cdot 10A}{\pi \cdot 0{,}5mm} = 8{,}0 \cdot 10^{-3}\frac{HA}{m^2} = \underline{\underline{8{,}0\cdot 10^{-3}T}}$$

Bruker et koordinatsystem som vist på figuren over. Magnetfeltet er da i positiv z-retning:

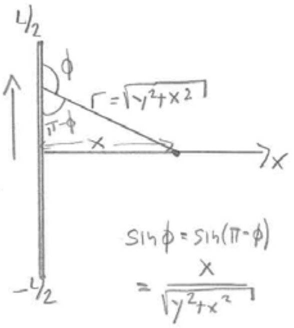
$$\underline{\underline{\vec{B} = 8{,}0\cdot 10^{-3}T\cdot \vec{k}}}$$

Dersom vi isteden bruker Biot-Savarts lov som er gyldig for en endelig leder, må vi integrere langs lederen som figuren viser (det forventes ikke at dette gjøres i besvarelsen men denne løsningen er tatt med for dem som har valgt å benytte denne framgangsmåten)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\phi dy}{(x^2+y^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{xdy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}Ix\left[\frac{y}{x^2(y^2+x^2)^{1/2}}\right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+x^2}}$$



Bruker superposisjonsprinsippet for å finne B midt mellom de to lederene og får:

$$B_{tot} = 2\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+x^2}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{H}{m}\cdot 10A\cdot 5cm}{2\pi\cdot 0{,}5mm\sqrt{(2{,}5cm)^2+(0{,}5mm)^2}} = \frac{40\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-2}\frac{H\cdot A}{m}m}{10^{-3}m\sqrt{2{,}5^2\cdot 10^{-2}}m}$$

$$= \underline{\underline{8{,}0\cdot 10^{-3}T}}$$

(Tilnærmelsen å bruke Amperes lov var ikke så gal)

c) Kraften mellom to ledere i avstand r er F=0,10 N
Avstanden d mellom lederne er:

$$F = I\cdot dl\cdot B = I\cdot l\frac{\mu_o I}{2\pi d} = 0{,}1N$$

$$d = \frac{I^2\cdot l\cdot \mu_o}{2\pi\cdot 0{,}1N} = \frac{(10A)^2\cdot 0{,}05m\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{H}{m}}{2\pi\cdot 0{,}1N} = 10^{-5}m = \underline{\underline{10\mu m}}$$

Oppgave 3: Optikk

a) <u>Avbildning i konkav linse</u>**:**

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_1'}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{S_1'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{S_1}=-\frac{1}{6cm}-\frac{1}{12cm}=-\frac{1}{4cm}$$

$$\underline{S_1'=-4cm}$$

<u>Avbilding i konveks linse:</u>
Objektavstand: $S_2 = d - S_1'$
Bildeavstand: $S_2' = \infty$
Bestemmer avstanden d mellom linsene fra linseformelen:

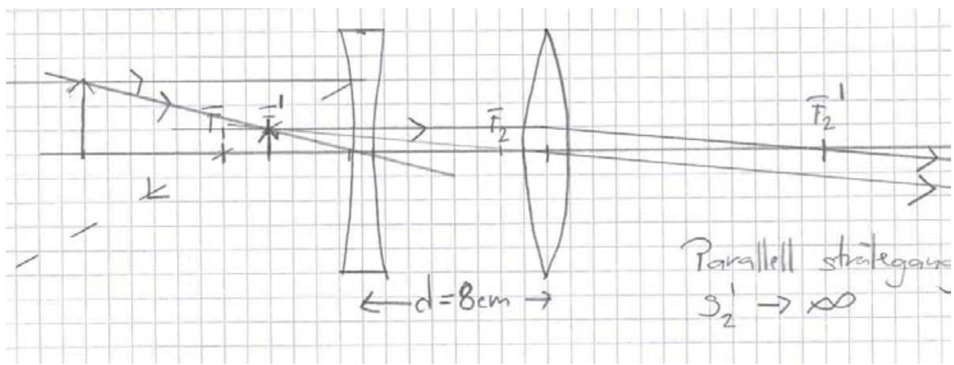
$$\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2'}=\frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{d-S_1'}=\frac{1}{f'}$$

$$d = f' + S_1' = 12cm - 4cm = \underline{\underline{8cm}}$$

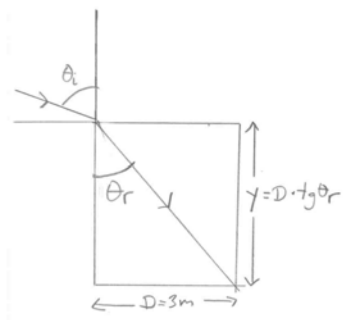
Det intermediære bildet gitt av den konkave linsen befinner seg i fokalpunktet til den konvekse linsen. Det gir parallell strålegang ut fra den konvekse linsen.

Strålegangen er tegnet nedenfor:



b) Dybden av tanken y finnes av likningen:

$$\tan\theta_r = \frac{D}{y}$$



Avbøyningsvinkelen θ_i finnes av Snell's brytningslov:

$$n_o \sin\theta_i = n \sin\theta_r$$

$$\sin\theta_r = \frac{1}{n}\sin\theta_i = \frac{1}{1{,}33}\sin 60^o = 0{,}6497$$

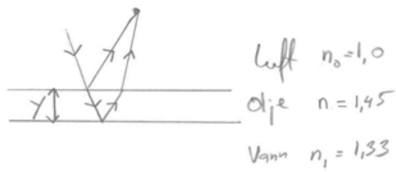
$$\theta_r = 40{,}5^o$$

$$y = \frac{3m}{\tan 40{,}5} = \underline{\underline{3{,}5m}}$$

Tykkelsen y av oljelaget finnes ved å se på fasevinkelen ved konstruktiv interferens. Fasevinkelen skyldes forskjellig tilbakelagt veglengde for lyset reflektert fra øvre og nedre brytningskant av oljelaget og faseforskjellen π når lyset treffere et tettere medium (luft -olje):

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2y + \pi = 2\pi m$$

$$y = \frac{1}{2}(m - \frac{1}{2})\lambda = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lambda$$



Den minste tykkelsen på oljelaget finnes for m=1.

Bølgelenden for det røde lyset i olje er: $\lambda = \frac{\lambda_o}{n} = \frac{630nm}{1{,}45}$

$$y = \frac{1}{4}\frac{630nm}{1{,}45} = \underline{\underline{108nm}}$$

c) Det mørke området i interferensmønsteret skyldes destruktiv interferens og oppstår når forskjellen i tilbakelagt veglengde for lyset fra de to spaltene er: $d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

Avbildingen langs skjermen betegnes y-retning og er gitt ved:

$$y = L\cdot\tan\theta \approx L\cdot\sin\theta = L\frac{\lambda}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

$$y_3 - y_2 = L\frac{\lambda}{d}\left((2+\frac{1}{2}) - (1+\frac{1}{2})\right) = 750nm\frac{630nm}{0{,}84mm} = \underline{\underline{0{,}56mm}}$$

Alternativ løsning:

$$y = L\tan\arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\frac{5}{2}\right) - L\tan\arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\frac{3}{2}\right) = 750mm\left[\tan\left(\arcsin\frac{630nm}{0{,}84mm}\frac{5}{2}\right) - \tan\left(\arcsin\frac{630nm}{0{,}84mm}\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= \underline{\underline{0{,}56mm}}$$

Interferensmaksimum mangler dersom diffraksjonsminimum faller sammen med interferensmaksimum.

Kriteriet for interferensmaksimum:

$$d\sin\theta = m_i \cdot \lambda$$

$$\sin\theta = m_i \frac{\lambda}{d}$$

Kriteriet for diffraksjonsminimum: $\sin\theta = m_d \frac{\lambda}{a}$

Interferensmaksimum mangler for spalteåpning a dersom:

$$m_i \frac{\lambda}{d} = m_d \frac{\lambda}{a}$$

$$a = \frac{m_d}{m_i} d = \frac{1}{3} 0{,}84mm = \underline{\underline{0{,}28mm}}$$

m_d=1 for den minste bredden spalten kan ha

Oppgave 4. Mekaniske svingninger

a) Bil med dårlige støtdempere og ingen demping b=0 har oscillerende bevegelse i x-retningen etter sammenstøt med fartsdump.
Newtons 2. lov gir bevegelseslikningen:

$$-kx = ma$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}}$$

Vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}5s}$

Den totale fjærkonstanten til bilen er : $k = m \cdot \omega^2 = 1500kg \left(\frac{2\pi}{1{,}5s}\right)^2 = \underline{\underline{26 \cdot 10^3 \, kg/s^2}}$

b) Bytter støtdempere slik at sammenstøtet med fartsdump gir en demping b.
Newtons 2.lov gir bevegelseslikningen:

$$-kx - bv = ma$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}}$$

Dempningskonstanten b kan bestemmes når vinkelfrekvensen ω_d er kjent:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}0s}$$

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$$

$$b^2 = 4m^2\left(\frac{k}{m} - \omega_d^2\right) = 4\cdot(1500kg)^2\left(\frac{26\cdot10^3 kg/s}{1500kg} - (3{,}14s^{-1})^2\right)$$

$$\underline{\underline{b = 8190kg/s}}$$

c) Etter sammenstøtet følger bilen en bevegelse gitt ved: $x(t) = A\cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_d t$

Hastigheten i x-retningen er: $v = \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{2m}Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_d t + A\omega_d e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\omega_d t$

Bilen oppnår maksimalt utslag i x-retning når v=0. Dette skjer ved tiden t:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{2m}Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_d t + A\omega_d e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\omega_d t = 0$$

$$-\frac{b}{2m}\sin\omega_d t + \omega_d\cos\omega_d t = 0$$

$$\tan\omega_d t = \frac{\omega_d\cdot 2m}{b} = \frac{3{,}14s^{-1}\cdot 2\cdot 1500kg}{8190kg/s} = 1{,}152$$

$$\omega_d t = 0{,}855$$

$$\underline{\underline{t = 0{,}27s}}$$

Det maksimale utslaget er: $x_{\text{maks}} = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_d t = 1{,}0m\cdot e^{-\frac{8190kg/s}{2\cdot1500kg}\cdot 0{,}27s}\sin 0{,}855 = \underline{\underline{0{,}36m}}$

Energien for bilens bevegelse er gitt av den mekaniske energien. Da hastigheten er null er den kinetiske energien $E_k=0$.

$$E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}26\cdot10^3\frac{kg}{s^2}\cdot(0{,}36m)^2 = \underline{\underline{1684 \approx 1{,}7kJ}}$$