Løsningsforslag eksamen 2. august 2003
SIF 4005 Fysikk for kjemi og materialteknologi

Oppgave 1 Elektrostatikk

a) Sylinderens totale ladning per lengdeenhet finnes ved å integrere ladningsfordelingen $\rho(r)$ over arealelementet $dA=2\pi r dr$ der sylinderens radius r varierer fra 0 til R:

$$Q_{tot} = \int_0^R \rho_o\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r dr = 2\pi\rho_0\int_0^R\left(rdr - \frac{r^2}{R}dr\right) = 2\pi\rho_0\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^3}{3R}\right]_0^R$$

$$= 2\pi\rho_0\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^2}}$$

Sylinderens ladning per lengdeenhet innenfor r, der r<R finnes ved å integrere ladningsfordelingen ρ (r) over arealelementet $dA=2\pi r dr$ der sylinderens radius r varierer fra 0 til r:

$$Q(r) = \int_0^r \rho_o\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r dr = 2\pi\rho_0\int_0^r\left(rdr - \frac{r^2}{R}dr\right) = 2\pi\rho_0\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}\frac{r^3}{R}\right]_0^r = \underline{\underline{\pi\rho_0 r^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{R}\right)}}$$

b) Elektrisk felt E(r) finnes ved å bruke Gauss lov og benytte en sylindrisk Gaussflate som varierer med radien r.

Det elektriske feltet utenfor sylinderen der r>R og $Q_{inne} = Q_{tot}$:

$$\oint E\cdot dA = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi r = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\pi\rho_0 R^2$$

$$\underline{\underline{E = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}}}$$

Elektriske felt innenfor sylinderen r<R der $Q_{inne}=Q(r)$:

$$\oint E\cdot dA = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi r = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi\rho_0 r^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{R}\right)$$

$$\underline{\underline{E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{R}\right)}}$$

c) Verdien av r som gir maksimalt E er gitt ved:

$$\frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2E}{dr^2} < 0$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(r - \frac{2}{3}\frac{r^2}{R}\right) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2}{3}2\frac{r}{R}\right) = 0$$

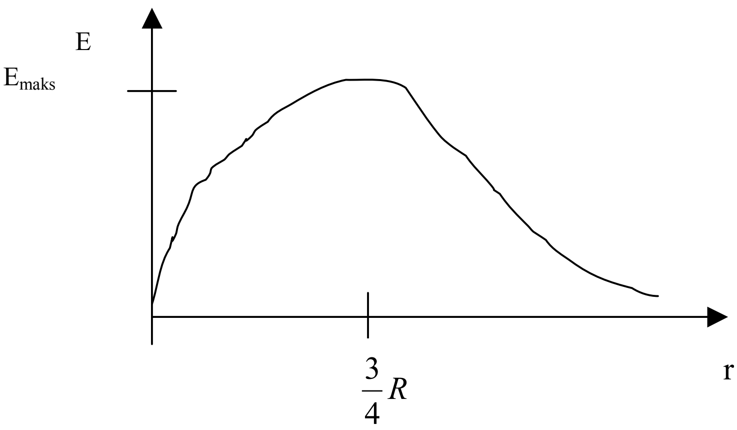
$$1 - \frac{4}{3}\frac{r}{R} = 0$$
$$\underline{\underline{r = \frac{3}{4}R}}$$

Sjekker at $\frac{d^2E}{dr^2} < 0$:

$$\frac{d^2E}{dr^2} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2}{3}2\frac{r}{R}\right) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(0 - \frac{2}{3}2\frac{1}{R}\right) < 0$$
$q.e.d$

Maksimalt elektrisk felt finnes da for r=3/4R:

$$E_{maks} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{3}{4}R\left(1 - \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{R}{R}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{16}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R}}$$



Oppgave 2 Magnetisme. Elektriske kretser

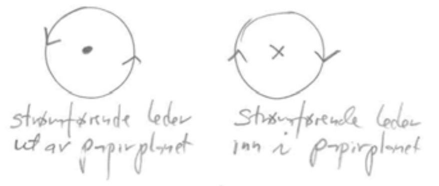
a) Amperes lov: $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{innenfor}$

Den lukkede integrasjonssløyfa rundt den uendelige lange lederen er en sirkel sentrert i lederen. Sirkelen har radius r og ligger i et plan vinkelrett på lederen. $\vec{B}$ er en tangent til denne sirkelen. Dersom strømmen gjennom lederen $I_{innenfor}$ =I er magnetfeltet:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint B\cdot dl = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$$

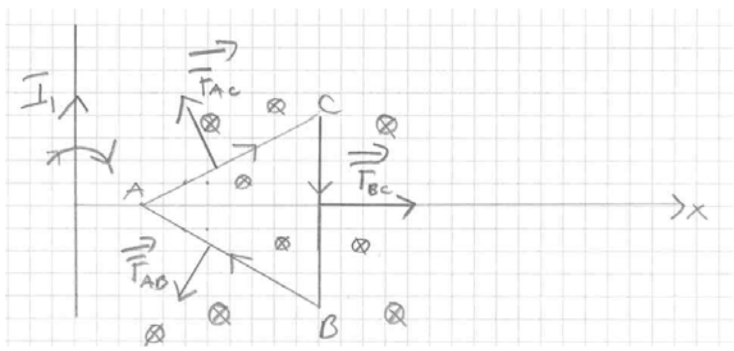
Magnetfeltets feltlinjer er konsentriske sirkler rundt den rette lederen med en retning som vist på figuren og $\vec{B}$ er i ethvert punkt på sirkelen en tangent til sirkelen:



b) Kraft på ledersløyfa i avstand x med strøm I_2=10A forårsaket av magnetfeltet fra leder med strøm I_1=20A:

$$d\vec{F} = I_2 \cdot \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$dF = I_2 \cdot dl \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$



Magnetfeltet fra leder med strøm I_1 peker vinkelrett inn i papirplanet rundt ledersløyfa. Høyrehåndsregelen gir da retning på kraften som figuren viser.

Kraften på sidekanten BC i avstand x=a+b fra rettlinjet leder:

$$F_{BC} = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \int dl = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} 2b\cdot \tan 30^0$$

der lengden av sidekanten BC er l=2b·tan30°

$$F_{BC} = 10A \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{H}{m}\cdot 20A}{2\pi}\frac{1}{10cm} 2\cdot 9cm\cdot \tan 30^\circ = \underline{\underline{4{,}2\cdot 10^{-5} N}}$$

Kraften står vinkelrett på sidekanten og parallelt med x-aksen.

Kraften på sidekanten AC i avstand x som varierer fra a til a+b der dl=dx/cos30º

$$F_{AC} = I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dl}{x} = I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi} \frac{1}{\cos 30^\circ} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi} \frac{1}{\cos 30^\circ} \ln \frac{a+b}{b}$$

$$= 20A \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 10A}{2\pi \cdot \cos 30^\circ} \ln \frac{10cm}{1cm} = \underline{\underline{10{,}6 \cdot 10^{-5}\, N}}$$

Kraften står vinkelrett på sidekanten AC og retningen på kraften er vist på figuren.

Kraften på sidekant AB F_{AB} har samme størrelse som F_{AC}. Kraften står vinkelrett på sidekanten AB og retningen er forskjellig fra F_{AB} som vist på figuren.
$\underline{\underline{F_{AB}=10{,}6\cdot 10^{-5}\ N}}$

Resultantkraften på ledersløyfa er:
y komponent av F_{AC} og F_{AB} opphever hverandre og F_{BC} har ingen y komponent
x komponent av $F_{AC}=F_{AC}\cos 60^\circ = 1/2F_{AC}$
x komponent av $F_{AB}=F_{AB}\cos 60^\circ=1/2F_{AB}$.
F_{BC} ligger langs x-aksen.

Resultantkraft:

$$\vec{F} = -\left(\frac{1}{2}F_{AC} + \frac{1}{2}F_{AB}\right) + F_{BC} = (-10{,}6 + 4{,}2)\cdot 10^{-5}\, N \cdot \vec{i} = \underline{\underline{-6{,}4 \cdot 10^{-5}\, N \cdot \vec{i}}}$$

c) Resultant kapasitansen C_{tot}:

C_1 og C_2 er koblet i parallell:

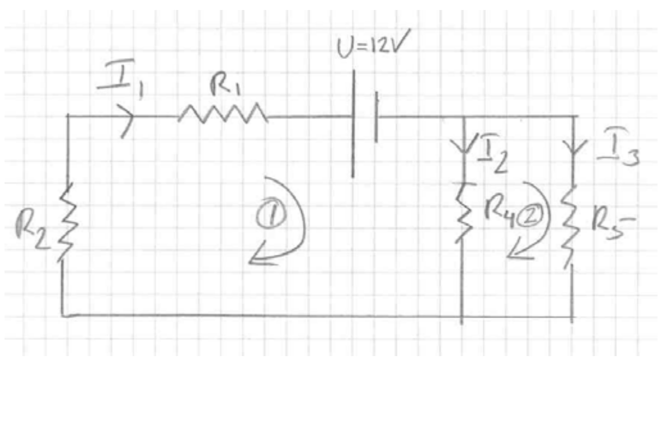
$$C_{12} = C_1 + C_2 = 1\mu F + 2\mu F = 3\mu F$$

C_1 og C_2 er koblet i serie med C3:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{3\mu F} + \frac{1}{3\mu F} = \frac{2}{3\mu F}$$

$$\underline{\underline{C_{tot} = 1{,}5\mu F}}$$

d) Strømmen gjennom motstandene når kondensatorene er fullt oppladet er:
Strømmen gjennom motstanden R_3 er 0 da det ikke går strøm til kondensatorene når de er fullt oppladet.
Strømmen gjennom de andre motstandene kan bestemmes ved Kirchhoffs regler. Figuren nedenfor viser de to slyngene og antatt retning på strømmen. Da det ikke går noen strøm til kondensatorene og gjennom R3 er disse ikke tegnet inn i figuren.



Slynge 1:
$$-U - R_4 I_2 - R_2 I_1 - R_1 I_1 = 0$$

Slynge 2:
$$-R_5 I_3 + R_4 I_2 = 0$$
$$I_3 = \frac{R_4}{R_5} I_2$$

Knutepunkt:
$$I_1 = I_2 + I_3 = I_2 + \frac{R_4}{R_5} I_2 = I_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right)$$

Setter inn for I_1 i likningen for slynge 1:
$$(R_1 + R_2) I_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) + R_4 I_2 = -U$$
$$(10\Omega + 20\Omega) I_2 \left(1 + \frac{40\Omega}{50\Omega}\right) + 40\Omega \cdot I_2 = -12V$$
$$I_2 = -\frac{12}{94} A = \underline{\underline{-0{,}128A}}$$

Strømmen går i motsatt retning av det som er antatt på tegningen.
$$I_3 = \frac{40\Omega}{50\Omega} \cdot (-0{,}128A) = \underline{\underline{-0{,}102A}}$$
Strømmen går i motsatt retning av det som er antatt på tegningen.

$$I_1 = -0{,}128A - 0{,}102A = \underline{\underline{-0{,}230A}}$$
Strømmen går i motsatt retning av det som er antatt på tegningen.

En alternativ og enklere måte og beregne de tre strømmene på:
Motstandene R_4 og R_5 som er koplet i parallell erstattes av en resultantmotstand R_{45}:

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$
$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{40\Omega \cdot 50\Omega}{40\Omega + 50\Omega} = 22{,}22\Omega$$

Strømmen I_1 gjennom motstandene R_1, R_2 og R_{45} er da:
$$(R_1 + R_2 + R_{45}) I_1 - U = 0$$
$$I_1 = \frac{12V}{52{,}22\Omega} = \underline{\underline{0{,}230A}}$$

Strømmene I_2 og I_3 gjennom motstandene R_4 og R_5 er:
$$R_4 \cdot I_2 = R_5 \cdot I_3$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_3 = I_1 - I_2$$
$$R_4 I_2 = R_5 (I_1 - I_2)$$
$$I_2 = \frac{R_5 I_1}{R_4 + R_5} = \frac{50\Omega \cdot 0{,}230A}{40\Omega + 50\Omega} = \underline{\underline{0{,}128A}}$$

$$I_3 = 0{,}230A - 0{,}128A = \underline{\underline{0{,}102A}}$$

Oppgave 3 Optikk

a) Totalrefleksjon oppstår dersom:

$$n_1 \cdot \sin\theta_i = n_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

Innfallsvinkelen $\theta_i = 90^\circ - 32{,}8^\circ = 57{,}2^\circ$

Oljens refraktive indeks n_2 må være:

$$n_2 = 1{,}52 \cdot \sin 57{,}2^\circ = \underline{\underline{1{,}28}}$$

b) Konstruktiv interferens i den reflekterte lysstrålen inntreffer dersom forskjellen i tilbakelagt veilengde for lysstrålen reflektert fra luft-glass flaten og fra glass-luft flaten er et helt antall bølgelengder, og det taes hensyn til at lyset skifter fase når det går mot et tettere medium fra luft til glass. Dvs at avstanden lyset går gjennom glassplaten 2d og endringen i fase π som tilsvarer $\lambda_{glass}/2$ må være et helt antall bølgelengder m:

$$2d + \frac{\lambda_{glass}}{2} = m \cdot \lambda_{glass}$$
$$\lambda_{glass}\left(m - \frac{1}{2}\right) = 2d$$

Bølgelengden i luft er λ_{luft} er gitt ved $\lambda_{glass=}$ λ_{luft} /n_{glass}.

m=1 $\lambda_{glass} = \frac{4}{2} d = 1{,}94\mu m$

m=2 $\lambda_{glass} = \frac{4}{3} d = 646nm$

m=3 $\lambda_{glass} = \frac{4}{5} d = 388nm$ $\lambda_{luft} = 1{,}52 \cdot 388nm = \underline{\underline{589nm}}$

m=4 $\lambda_{glass} = \frac{4}{7} d = 277nm$ $\lambda_{luft} = 1{,}52 \cdot 277nm = \underline{\underline{421nm}}$

m=5 $\lambda_{glass} = \frac{4}{9}d = 215nm$ $\lambda_{luft} = 1{,}52 \cdot 215nm = \underline{\underline{328nm}}$

Bølgelengdene i det synlige området som forsterkes i luft er λ_{luft}=589nm og λ_{luft}=421nm.

c) Konstruktiv interferens inntreffer når forskjellen i tilbakelagt veilengde for lys som slipper gjennom de to spaltene med innbyrdes avstand d er:

$$d \cdot \sin\theta = n\lambda$$

Avbøyningsvinkelen θ er gitt ved:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{L} = \frac{1mm}{2m} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta = 5 \cdot 10^{-4}$$

Lysets bølgelengde er:

$$\lambda = d \cdot \sin\theta = 1mm \cdot 5 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{500nm}}$$

d) Forskjellen i veilengde for lys som slipper gjennom de to spaltene til et punkt P på skjermen er:

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2} + d \cdot \sin\theta$$

Konstruktiv interferens oppstår dersom:

$$\Delta l = n\lambda$$

$$\frac{\lambda}{2} + d \cdot \sin\theta = n\lambda$$

$$d \cdot \sin\theta = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda$$ der n= ±1, ±2, ±3, …..

Destruktiv interferens oppstår dersom:

$$\Delta l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\frac{\lambda}{2} + d \cdot \sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$d \cdot \sin\theta = n\lambda$$ der n= ±1, ±2, ±3, …..

Beliggenheten for maksimum langs skjermen (y-retning) er:

$$y_{maks} = L \cdot \tan\theta \approx L \cdot \sin\theta = L \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$ der n= ±1, ±2, ±3, …..

n=1 $y^1_{maks} = 2m \cdot \frac{1}{2}\frac{500nm}{1mm} = \underline{\underline{0{,}5mm}}$

n=2 $y^2_{maks} = 2m \cdot \frac{3}{2}\frac{500nm}{1mm} = \underline{\underline{1{,}5mm}}$

osv med 1 mm avstand.

Beliggenheten for minimum langs skjermen (y-retning) er:

$y_{\min} = L \cdot \tan\theta \approx L \cdot \sin\theta = L \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot n$ der n= ±1, ±2, ±3, …..

n=1 $y^1_{\min} = 2m \cdot \frac{500nm}{1mm} = \underline{\underline{1{,}0mm}}$

n=2 $y^2_{\min} = 2m \cdot \frac{500nm}{1mm} 2 = \underline{\underline{2{,}0mm}}$

osv med 1 mm avstand.

I skjermens sentrum C er θ=0

$y_C = L \cdot \tan\theta \approx L \cdot \sin\theta = 0$ tilsvarere n=0

Dvs <u>det er et minimum i C</u>

Oppgave 4 Mekanikk

a) Sammenhengen mellom perioden T, svingefrekvensen f og svingebevegelsens vinkelfrekvens ω, er:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dersom dempningen b=0 er klossens egenfrekvens:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ved dempning b er egenfrekvensen:

$$\omega^1 = 2\pi f^1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Fjærkonstanten er da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \frac{5kg}{(20s)^2} = \underline{\underline{0{,}493kg/s^2}}$$

Dempningskonstanten er gitt ved egenfrekvensen ω^1:

$$\omega^1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$b^2 = 4m^2\left(\frac{k}{m} - (\omega^1)^2\right) = 4m^2\left(\frac{k}{m} - (\frac{2\pi}{T^1})^2\right) = 4 \cdot 25kg\left(\frac{0{,}493kg/s^2}{5kg} - \frac{(2\pi)^2}{(21s)^2}\right)$$

$$\underline{\underline{b = 0{,}953kg/s}}$$

b) Amplituden dempes eksponentielt. Det tar tiden t før utsvingsamplituden er redusert til det halve av den maksimale amplituden:

$$Ae^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{A}{2}$$

$$-\frac{b}{2m}t = \ln\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{2m}{b}\ln 2 = \frac{2 \cdot 5{,}0kg}{0{,}953kg/s}\ln 2 = \underline{\underline{7{,}27s}}$$

c) Klossens svingebevegelse er:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Initialbetingelsene ved tiden t=0 er:

$$x_o = A\cos\delta = 0{,}50m$$

$$v_o = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \delta) = -A\omega\sin\delta = -0{,}15m/s$$

Amplituden A og fasen δ bestemmes:

$$\frac{v_0}{x_0} = -\frac{A\omega\sin\delta}{A\cos\delta} = -\omega\tan\delta$$

$$\tan\delta = -\frac{v_o}{x_o\omega} = \frac{0{,}15m/s}{0{,}50m \cdot 0{,}31s^{-1}} = 0{,}9677$$

$$\underline{\underline{\delta = 44{,}0^\circ}}$$

der $\omega = 2\pi/T = 2\pi/20s = 0{,}31s^{-1}$

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{0{,}50m}{\cos 44^\circ} = \underline{\underline{0{,}695m}}$$