NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Fagleg kontakt under eksamen:
Professor Asle Sudbø
Tlf: 93403

EKSAMEN I SIF4007 - FYSIKK
Mandag 7. mai, 2001
kl. 0900-1500
Tilletne hjelpemiddel: Godkjend lommekalkulator
K. Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Vedlagd formelliste

Opplysningar som det kan hende blir bruk for, og som kandidaten sjølv må tolke:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ h &= 2\pi\ \hbar = 6.63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \end{aligned}$$

Schrödinger-likninga for partikkel som rører seg langs x-aksen i eit potensial $U(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x,t)}{dx^2} + U(x)\ \Psi(x,t) \ = \ i\ \hbar\ \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Stasjonær tilstand:

$$\Psi(x,t) \equiv \psi(x)\ e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Bølgjefunksjonen for ein fri partikkel som rører seg mot høgre langs x-aksen med bølgjetal $k = 2\pi/\lambda$, der λ er materiebølgjas bølgjelengde, er gitt ved

$$\psi(x) = C\ e^{ikx}$$

Bølgjefunksjonen for ein fri partikkel som rører seg mot venstre langs x-aksen med bølgjetal $k = 2\pi/\lambda$, der λ er materiebølgjas bølgjelengde, er gitt ved

$$\psi(x) = C\ e^{-ikx}$$

$$\begin{aligned} \ln(A^B) &= B\ \ln(A) \\ \ln(AB) &= \ln(A) + \ln(B) \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$$

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \ \sin(kx)$$

Den generelle løysinga til differensiallikninga

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 \ y = 0$$

er gitt ved

$$y(x) = c_1 \ \cos(kx) + c_2 \ \sin(kx)$$

der k er reell og $k > 0$.
Den generelle løysinga til differensiallikninga

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 \ y = 0$$

er gitt ved

$$y(x) = c_1 \ e^{kx} + c_2 \ e^{-kx}$$

der k er reell og $k > 0$.

$$\frac{de^{\alpha x}}{dx} = \alpha \ e^{\alpha x}$$

Vektor-produktet av to vektorar $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er gitt ved

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Dei ulike komponentane av $\vec{C}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} C_x &= A_y \ B_z - A_z \ B_y \\ C_y &= A_z \ B_x - A_x \ B_z \\ C_z &= A_x \ B_y - A_y \ B_x \end{aligned}$$

når

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \ \hat{x} + A_y \ \hat{y} + A_z \ \hat{z} \\ \vec{B} &= B_x \ \hat{x} + B_y \ \hat{y} + B_z \ \hat{z} \end{aligned}$$

der $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ er einingsvektorar i x-, y-, og z-retningane.

Oppgåve 1 (Tel 30%)

a) Sjå på ei stode med statisk ladningsfordeling i ein perfekt leiar, dvs. en leiar med uendelig stor leiingsevne for DC-straum. Kva er verdien på det elektrostatiske feltet $\vec{E}$ inne i denne leiaren? Gi grunn for svaret.

b) Gauss-lova er gitt ved

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Forklar kva symbola i denne likninga tyder, og kva det fysiske innhaldet i likninga er. Kor må etter dette ladninga på ein perfekt leiar vera samla?

c) Sjå på ein uendelig lang lada sylinder med radius b, og senter-aksen langs z-aksen. Vi ser på sylinderen som ein perfekt leiar, og ladningstettleiken $\rho(x, y, z)$ er samla på overflata av sylinderen, og er statisk og konstant, dvs

$$\rho(x, y, z) \quad = \quad \rho_0; \quad -\infty < z < +\infty, x^2 + y^2 = b^2$$

og er null alle andre stader. Vi går ut frå at $\rho_0 > 0$. Feltet frå sylinderen er oppgitt å vera radielt retta ut frå z-aksen, $E_z = 0$, slik at $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$, der $\hat{r}$ er ein einingsvektor som er parallell med (x, y)-planet, og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er avstanden frå sylinderen sin senter-akse (z-aksen).

i) Teikn ei skisse av systemet, og gi klårt retninga på $\vec{E}$-feltet.

ii) Teikn opp ei fornuftig Gauss-flate på skissa, og bruk Gauss-lova til å finne E_r for $r < b$, og $r > b$. Skisser $E_r(r)$ kvalitativt som funksjon av r.

d) Samanhengen mellom det elektrostatiske feltet $\vec{E} = E_r(r)\ \hat{r}$ og det elektrostatiske potensialet $V(r)$ er i dette høvet gitt ved

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Bruk dette til å finne $V(r)$, når det er oppgitt at potensialet er $V(r) = 0$ ved avstanden $r = 2b$. Skisser $V(r)$ kvalitativt som funksjon av r.

e) For kva avstandar frå sylinderen sin senter-akse er potensialet -1, -5, og -10 gonger så stort som potensialet ved sylinderen si overflate, $V(r = b)$? Uttrykk svara ved sylinderen sin radius b.

Oppgåve 2 (Teller 35%)

a) Kva er hovudskilnaden på opphava til elektriske og magnetiske felt?

b) Likningane som fastlegg statiske elektriske og magnetiske felt er gitt ved

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J}(x,y,z) \end{aligned}$$

Forklar kva symbola i desse likninganc står for. Talverdiar på naturkonstantar krevs ikkje.

c) Teikn opp typiske feltlinjer for statiske elektriske og magnetiske felt, og relater skissene til svaret du ga i punkt **a)**.

c) Magnetfeltet frå eit lite straumførande linje-element er gitt ved

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, I \, \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{\vec{r}^2}$$

Forklar kva symbola i denne likninga tyder, og gi ei klår skisse der du teikner inn vektorane i likninga og retningane deira.

d) Ei sirkulær straumsløyfe med radius R ligg i (x, y)-planet, sentrert i origo ($x = y = z = 0$). Sløyfa er laga av ein uendelig tynn leiar.
Teikn opp straumsløyfa, og gi retninga på magnetfeltet frå sløyfa på z-aksen ($x = y = 0$), B_z, både for positive og negative verdiar av z (over eller under sløyfa).

e) Bruk formelen i punkt **c)** til å rekne ut verdien av z-komponenten av $\vec{B}$-feltet, B_z, i eit observasjonspunkt på z-aksen. For kva verdi av z er B_z størst? Grei ut kvalitativt om kvifor det er slik. (Hint: Integrer uttrykket for z-komponenten av $d\vec{B}$ rundt straumsløyfa for ein fiksert verdi av z.)

f) Vis at for store avstandar langs z-aksen frå origo, $|z| >> R$, er B_z gitt ved

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{2\mu_z}{|z|^3}$$

der $\vec{\mu} = \mu_z \, \hat{z}$ er sløyfa sitt magnetiske dipolmoment. Gi eit uttrykk for μ_z.

g) Gå ut frå at sløyfa vert sett inn i eit konstant ytre magnetfelt $\vec{B}_0$. Dreiemomentet på sløyfa frå magnetfeltet, $\vec{\tau}$, er gitt ved

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$$

i) Kva retning på magnetfeltet gir størst positiv x-komponent av dreiemomentet på straumsløyfa?
ii) Teikn opp ei skisse som syner dipolmoment $\vec{\mu}$, ytre magnetfelt $\vec{B}_0$, og dreiemoment $\vec{\tau}$ i punkt i) over, dersom sløyfa ligg fast i (x, y)-planet.
iii) Dersom straumsløyfa får rotere fritt i punkt i) over, teikn då ei skisse av straumsløyfa, $\vec{B}_0$, og gi storleiken på $\vec{\tau}$, når sløyfa står i ei slik stilling at den potensielle energien $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$ til straumsløyfa i magnetfeltet vert minst mogleg.

Oppgåve 3 (Teller 35%)
Ein partikkel med masse m og energi E som rører seg i ein dimensjon (langs x-aksen) vert sendt inn frå venstre mot ei potensialbarriere $U(x)$ gitt ved

$$U(x) = 0; \quad x < 0; \qquad U(x) = U_0; \quad x > 0$$

der U_0 er ein positiv konstant. I heile oppgåva brukar vi at $E > U_0$.

a) Set opp Schrödinger-likninga for romdelen av partikkelens bølgjefunksjon $\psi(x)$ både for $x < 0$ og $x > 0$, og grei ut om kva dei ulike ledda i likninga tyder.
b) Vis ved innsetting i Schrödinger-likninga at løysingane for $x < 0$ og $x > 0$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A\, e^{ik_1 x} + B\, e^{-ik_1 x}; \quad x < 0 \\ \psi(x) &= C\, e^{ik_2 x} + D\, e^{-ik_2 x}; \quad x > 0 \end{aligned}$$

og gi uttrykk for k_1 og k_2 ved hjelp av $\hbar$, E, U_0, og m. Kva vert verdien på D for dette systemet? Gi grunn for svaret.

c) Bølgjefunksjonen $\psi(x)$ inneheld informasjon om partikkelens fysiske tilstand. For at ein slik bølgjefunksjon skal kunne beskrive ein verkeleg fysisk tilstand, kva tre krav må det settast på den? Gi ein grunn for kvart av krava.

d) Sannsynet R for at ein partikkel, som kjem frå venstre og treffer barriera ved $x = 0$, vert kasta attende mot venstre, er gitt ved

$$R \equiv \left(\frac{C}{A}\right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

Finn R uttrykt berre ved E og U_0. Kva skjer når $E/U_0 \to \infty$ og $E/U_0 \to 1$?

e)
i) Finn eit uttrykk for den kinetiske energien til partikkelen for $x < 0$ og $x > 0$ for ein generell verdi av $E/U_0 > 1$.
ii) Rekn ut R når den kinetiske energien til partikkelen er 4 gonger så stor for $x < 0$ som for $x > 0$.
iii) Gi den generelle samanhengen mellom R og sannsynet for at partikkelen skal halde fram mot høgre, T, ved potensialbarriera ved $x = 0$. Bruk så dette til å finne verdien på T under dei høva som er gitt i punkt ii).
iv) Tenk deg at den kinetiske energien til partikkelen for $x < 0$ skal endrast slik at R aukar frå den verdien du fann i punkt ii). Korleis ventar du at denne energien må endrast for å oppnå ein auke av R? Gi grunn for svaret.
v) Kva faktor må du gange den kinetiske energien for $x < 0$ som du brukte i punkt ii) med, for å finne $T = 0$? Diskutér om dette er eit fornuftig svar, med utgangspunkt i det du fann i punkt iv).