SIF 4008 FYSIKK
FOR MARIN TEKNIKK

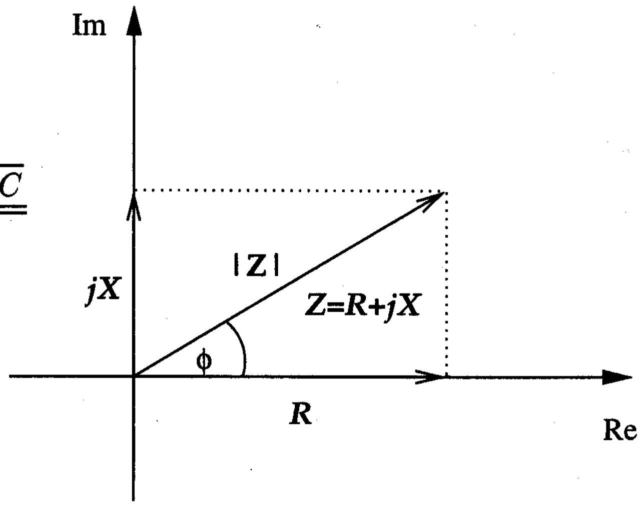
LØSNING EKSAMEN VÅREN 1999

Oppgave 1. (a) Den komplekse impedansen til kretsen er lik summen av impedansene for hver komponentnt for seg:

$$\underline{\underline{Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}$$

Vi kan omforme dette slik:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R + jX \, . \end{aligned}$$



I figuren har vi tegnet den komplekse impedansen i det komplekse plan. Fra figuren ser vi at enkel pytagoras og trigonometri gir:

$$\underline{\underline{|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

$$\underline{\underline{\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}} \, .$$

Dermed kan impedansen skrives på formen:

$$\underline{\underline{Z = |Z| e^{j\phi}}}$$

(b) Den komplekse strømmen i kretsen blir vha. Ohms lov $V = ZI$:

$$\underline{\underline{I = \frac{V}{Z} = \frac{V_1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}}$$

(c) Ohms lov $V = ZI$ gir at spenningen over kondensatoren må være gitt ved:

$$\begin{aligned} V_2 &= Z_C I \\ &= \frac{I}{Z_C} \, . \end{aligned}$$

Hvis vi benytter strømmen fra oppgave (c) får vi:

$$V_2 = \frac{V_1}{j\omega C\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)},$$

eller

$$\underline{\underline{\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{j\omega C\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}}}$$

(d) Først må vi finne absoluttverdien til forholdet V_2/V_1. Det gjør vi slik:

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{V_1} &= \frac{1}{j\omega C\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} \\
&= \frac{1}{j\omega RC + (1 - \omega^2 LC)} \\
\left|\frac{V_2}{V_1}\right| &= \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}
\end{aligned}$$

Nå er vi litt lure. Vi prøver å minimere funksjonen:

$$\begin{aligned}
g(C) &= (\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2 \\
\frac{dg}{dC} &= 2\omega^2 R^2 C - 2(1 - \omega^2 LC)\omega^2 L \\
&= C(2\omega^2 R^2 + 2\omega^4 L^2) - 2\omega^2 L
\end{aligned}$$

Setter lik null og løser mhp. C:

$$\begin{aligned}
C(2\omega^2 R^2 + 2\omega^4 L^2) - 2\omega^2 L &= 0 \\
C(2\omega^2 R^2 + 2\omega^4 L^2) &= 2\omega^2 L \\
C &= \frac{2\omega^2 L}{2\omega^2 R^2 + 2\omega^4 L^2} \\
C &= \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}.
\end{aligned}$$

Vi setter inn $R = 0.7\,\Omega$, $L = 10\,\mu\text{H}$ og $f = 9410\,\text{kHz}$. Vi husker at $\omega = 2\pi f$ og får:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
&= \frac{10 \cdot 10^{-6}}{0.7^2 + (2\pi \cdot 9410 \cdot 10^3)^2 (10 \cdot 10^{-6})^2} \\
&= 2.86062 \cdot 10^{-11}\,\text{F}
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\underline{\underline{C = 28.6062\,\text{pF}}}$$

Kretsen har en skarp resonanstopp for at en ikke skal ta inn naboradiostasjoner.

(e) Kirchhoffs spenningslov gir:

$$\begin{aligned} RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= v_0 \cos \omega t \\ L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + C^{-1}Q &= v_0 \cos \omega t \ , \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet knepet $I = \frac{dQ}{dt}$ to steder. Vi ser at vi må gjøre følgende substitusjoner for at ligningene skal bli identiske:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow m \\ R &\rightarrow b \\ C^{-1} &\rightarrow k \\ v_0 &\rightarrow F_0 \\ Q &\rightarrow x \end{aligned}$$

Man kan mao. betrakte den påtrykte spenningen fra antennen $v_0 \cos \omega t$ som en slags kraft $F_0 \cos \omega t$ som setter ladningen Q i harmoniske svingninger (i posisjon x). Det er dempning i systemene pga. R og b.

Oppgave 2. (a) Vi skal utlede bølgeligningen for strengen. Massen til et lite stykke Δx av strengen er:

$$m = \mu \Delta x \ ,$$

og strengens aksellerasjon i y–retning er:

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ .$$

Vi antar at ethvert punkt på strengen bare beveger seg opp og ned i y–retning, slik at det ikke er noen aksellerasjon i x–retning, og da heller ikke noen netto kraft i x–retning. Siden ethvert punkt på strengen er i ro i x retning er det naturlig å tro at summen av kreftene også er null i x–retning:

$$\Sigma F_x = F_{2x} - F_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2x} = F_{1x} = F \ ,$$

hvor vi benytter bokstaven F som samlebetegnelse for F_{2x} og F_{1x}. Kraften som virker på strengen (snordraget, strengdraget) har i ethvert punkt samme retning som strengen. Dermed blir forholdet mellom y og x komponentene identisk med stigningstallet (eller den deriverte) til strengkurven i ethvert punkt:

$$\begin{aligned} \frac{F_{2y}}{F_{2x}} &= \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \\ \frac{F_{1y}}{F_{1x}} &= \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x} \end{aligned}$$

Summen av kreftene i y–retning er da:

$$\Sigma F_y = -F_{1y} + F_{2y} = -F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} ,$$

der F er samlebetegnelsen for F_{2x} og F_{1x}. Newtons andre lov gir:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= ma_y \\ F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] &= \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Vi deler på $F\Delta x$ på begge sider og får:

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Grensen når $\Delta x \to 0$ er:

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}}$$

Hvis vi sammenligner med bølgeligningen skrevet på standardform:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ,$$

ser vi at bølgefarten v er gitt ved:

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}}$$

(b) De to leddene representerer to bølger som går i motsatt retning, en mot høyre og en mot venstre. Vi kan omforme dette uttrykket vha. den oppgitte formelen:

$$\begin{aligned}y(x,t) &= A[\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)] \\ &= 2A\sin\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right) \\ &= 2A\sin(-kx)\cos(\omega t) \\ &= 2A\sin(kx)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

Dette er ligningen for en stående bølge. Et hvert punkt på strengen beveger seg bare opp og ned pga. $\cos(\omega t)$ med amplitude gitt av $\sin(kx)$. Vi benytter den oppgitte grensebetingelsen og får:

$$\begin{aligned}y(L,t) &= 0 \\ 2A\sin(kL)\cos(\omega t) &= 0 \\ \sin(kL) &= 0 \\ kL &= n\pi , \qquad n = 1,2,3,\cdots \\ \frac{2\pi}{\lambda}L &= n\pi \\ \frac{2\pi f}{v}L &= n\pi \\ f &= \frac{n}{2L}v\end{aligned}$$

Grunntonen får vi når $n = 1$:

$$\underline{\underline{f = \frac{1}{2L_1} v = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{F}{\mu}}}}$$

Vi løser denne siste formelen mhp. L_1 og får:

$$\underline{\underline{L_1 = \frac{1}{2f}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 247.5}\sqrt{\frac{99.8}{0.00101}} = 63.5\,\mathrm{cm}}}$$

(c) For en seljefløyte gjelder en tilsvarende frekvensformel som for en gitar, dvs.

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \,. \tag{1}$$

Når $n = 1$ fremkommer den nest laveste frekvensen det er mulig å få ut av fløyta, den laveste fremkommer ved halvåpen fløyte. For å unngå sammenblanding med lengden L_1 av gitarstrengen og for å presisere at $n = 1$ for åpen fløyte er frekvens nr. 2 regnet nedenfra for fløyta totalt sett, kaller vi lengden av fløyta for L_2. Vi løser mhp. L_2 og får:

$$\underline{\underline{L_2 = \frac{1}{2f}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \frac{1}{2 \cdot 311.1}\sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.314 \cdot (273.16 + 36)}{0.0288}} = 56.81\,\mathrm{cm}}}$$

(d) Grunntonen til gitaren vil stige når det blir kaldere, rett og slett fordi strekket i strengen F da blir større fordi strengen blir kortere. Siden lydhastigheten er proposjonal med kvadratroten av temperaturen så vil altså fløytas lengde regnet i antall bølgelengder variere med temperaturen. Når det blir kaldere vil derfor grunntonen til fløyta synke.

Vi skal finne den temperaturen T_0 hvor fløyta og gitaren har samme grunntone. Det vil være mulig ser vi fra tabellen, siden gitaren ligger under fløyta i frekvens. Vi kan derfor slutte at frekvensen til gitaren vil stige fra en H (247.5 Hz) noen toner C, Ciss osv. Grunntonen til fløyta vil falle med temperaturen fra en Diss (311.1 Hz) ned noen toner D, Ciss osv.

Først må vi finne formelen for hvordan frekvensen til gitaren varierer med temperaturen. Vi kombinerer de to oppgitte formlene, sammenhengen mellom lengdeendring og kraftendring er:

$$\Delta F = -YA\frac{\Delta L}{L} \,, \tag{2}$$

hvor Y er Youngs modulus (enhet $\mathrm{N/m^2}$) og A er strengens tverrsnitt. Kombinert gir disse to mekanismene en temperaturavhengig kraftendring:

$$\Delta F = -YA\alpha\Delta T \,. \tag{3}$$

Denne formelen sier at en endring i temperatur forårsaker en endring i kraft, dvs. når det blir kaldere (slik at ΔT er negativ: husk at ΔT kan være både positiv og negativ!) så vil kraften på strengen bli ΔF større. Vi erstatter F med $F + \Delta F$ i formelen for strengens bølgefart og får således temperaturavhengige grunntone:

$$f = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{F+\Delta F}{\mu}} = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{F - YA\alpha\Delta T}{\mu}} \tag{4}$$

hvor $\Delta T = T - T_0$ og T_0 er 36 °C regnet i Kelvin. Vi setter denne frekvensen lik fløytas frekvens og løser mhp. temperaturen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{F - YA\alpha(T-T_0)}{\mu}} &= \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \\
\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \frac{F - YA\alpha(T-T_0)}{\mu} &= \frac{\gamma RT}{M} \\
T\left[\frac{\gamma R}{M} + \frac{YA\alpha}{\mu}\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\right] &= \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \frac{F + YA\alpha T_0}{\mu} \\
T &= \frac{\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \frac{F+YA\alpha T_0}{\mu}}{\frac{\gamma R}{M} + \frac{YA\alpha}{\mu}\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2}
\end{aligned}$$

Vi setter inn de numeriske verdiene og får:

$$T = \frac{\left(\frac{0.5681}{0.635}\right)^2 \frac{99.8+2.0\cdot 10^{11} 5.05\cdot 10^{-7} 1.20\cdot 10^{-5}(273.16+36)}{0.00101}}{\frac{1.4\cdot 8.314}{0.0288} + \frac{2.0\cdot 10^{11} 5.05\cdot 10^{-7} 1.20\cdot 10^{-5}}{0.00101}\left(\frac{0.5681}{0.635}\right)^2} = 275.55\,\text{Kelvin}\ .$$

I grader Celcius tilsvarer dette:

$$\underline{\underline{T = 275.55 - 273.16 = 2.39\,^\circ\text{C}}}$$

Dette tilsvarer en frekvens på (setter inn i den enkleste formelen!):

$$\underline{\underline{f = \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \frac{1}{2\cdot 0.5681}\sqrt{\frac{1.4\cdot 8.314\cdot 272.6743}{0.0288}} = 293.71\,\text{Hz}}}$$

Dette er ifølge tabellen nøyaktig en D. Regner man med ferre desimaler vil man likevel komme så nær (± et par Hz) at det går for å være en D.

(e) Når temperaturen ikke er nøyaktig lik 0.4857 °C så vil grunntonene være litt forskjellige. Vi vil da høre at amplituden til instrumentene vil variere med tiden. Dette fenomenet kalles sveving.

Oppgave 3. (a) Gauss' lov er:

$$\underline{\underline{\oiint \epsilon_0\epsilon_r \vec{E}d\vec{A} = Q}}$$

Denne loven sier at styrken på det elektriske feltet $\vec{E}$ som strømmer ut (eller inn) fra et volum med en overflate $A = \oiint dA$ er gitt av netto ladning Q inne i volumet. $\vec{E}$ feltet er radielt rettet pga. sylindersymmetri. Derfor får vi ikke bidrag til fluksen fra endeflatene til en sylindrisk Gaussflate med areal $2\pi al$. Total ladning i lederen er Q. Gauss' lov gir derfor:

$$\oiint \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 \epsilon_r E(r)\, 2\pi r l = Q$$

$$\underline{\underline{E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r}}}$$

(b) E–feltet integreres radielt fra $r = b$ til $r = a$

$$\begin{aligned} V &= -\int \vec{E} d\vec{r} \\ &= -\int_b^a \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r} \\ &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r\, l} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Kabelens kapasitans blir dermed

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\ln \frac{b}{a}}$$

og per lengdenhet

$$\underline{\underline{C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}}}}$$

(c) Amperes lov er:

$$\underline{\underline{\oint \frac{\vec{B} d\vec{l}}{\mu_0 \mu_r} = I}}$$

Denne loven sier at styrken på det magnetiske feltet $\vec{B}$ på randen (med lengde $l = \oint dl$) av et areal er gitt av netto strøm I som går i gjennom arealet. Pga. sylindersymmetri har $\vec{B}$ feltet samme verdi langs en sirkel med radius r. Amperes lov gir da:

$$\oint \frac{\vec{B} d\vec{l}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{2\pi r B(r)}{\mu_0 \mu_r} = I$$

$$\underline{\underline{B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}}},$$

(d) Den totale fluksen er integralet fra a til b over $d\Phi$

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_a^b Bldr \\ &= \int_a^b \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r} ldr \\ &= \left[\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi} l\ln(r)\right]_a^b \\ &= \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi} l\ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Kabelens induktans blir dermed

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} l\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

og per lengdenhet

$$\underline{\underline{L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

(e) Karakteristisk impedans er forholdet mellom spenningen og strømmen som forplanter seg bortover koaksialkabelen. Hvis vi setter inn for L_0 og C_0 så får vi:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

Dette er lik $50\,\Omega$ når forholdet b/a er lik:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \exp\left\{2\pi Z_0\cdot\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_r}}\right\} \\ &= \exp\left\{2\pi 50\cdot\sqrt{\frac{8.85\cdot 10^{-12}\cdot 2.3}{4\pi\cdot 10^{-7}}}\right\} \\ &= \underline{\underline{3.5409}}\end{aligned}$$