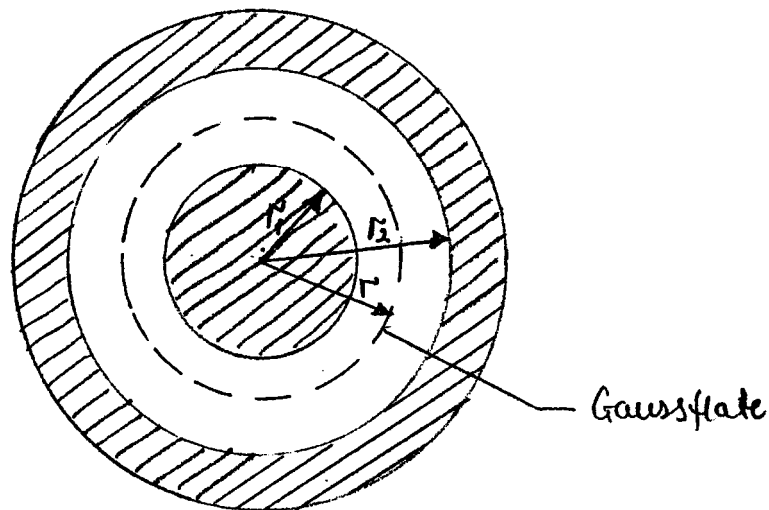


Løsningsforslag SIF 4008 FYSIKK 26/5-00

Oppgave 1

- a) Vi nytter Gauss lov på en lukket sylindrisk flate med radius $r_1 < r < r_2$ og lengde l (mindre enn kjernens lengde slik at vi kan betrakte feltet E som radieelt rettret.)

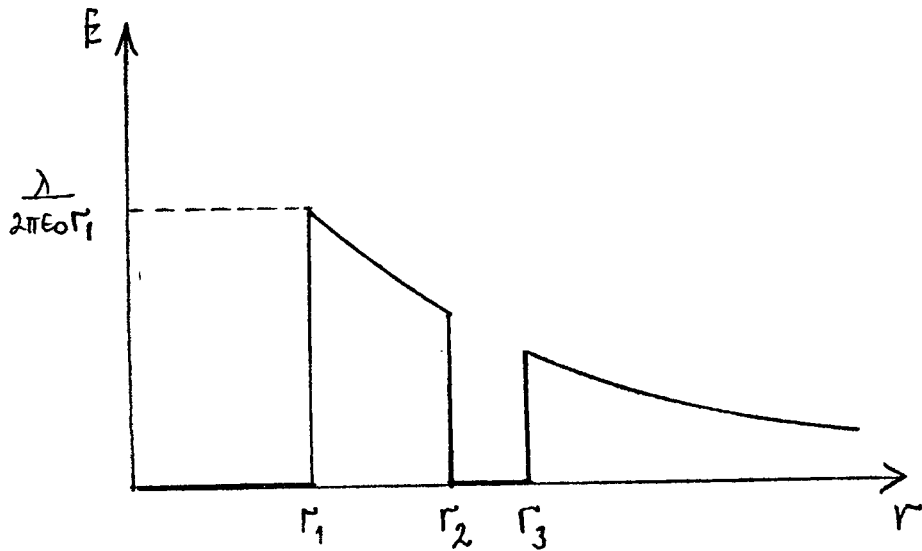


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r_1 < r < r_2$$

- b) Inne i kjernen og i skallet er $E(r) = 0$. Inne i et ledende materiale er $E = 0$. Hvis ikke ville ladning bevege seg inntil stationær tilstand var inntrådt. Dette betyr at all ladning vil samles på overflaten og feltlinjene står normalt på den.

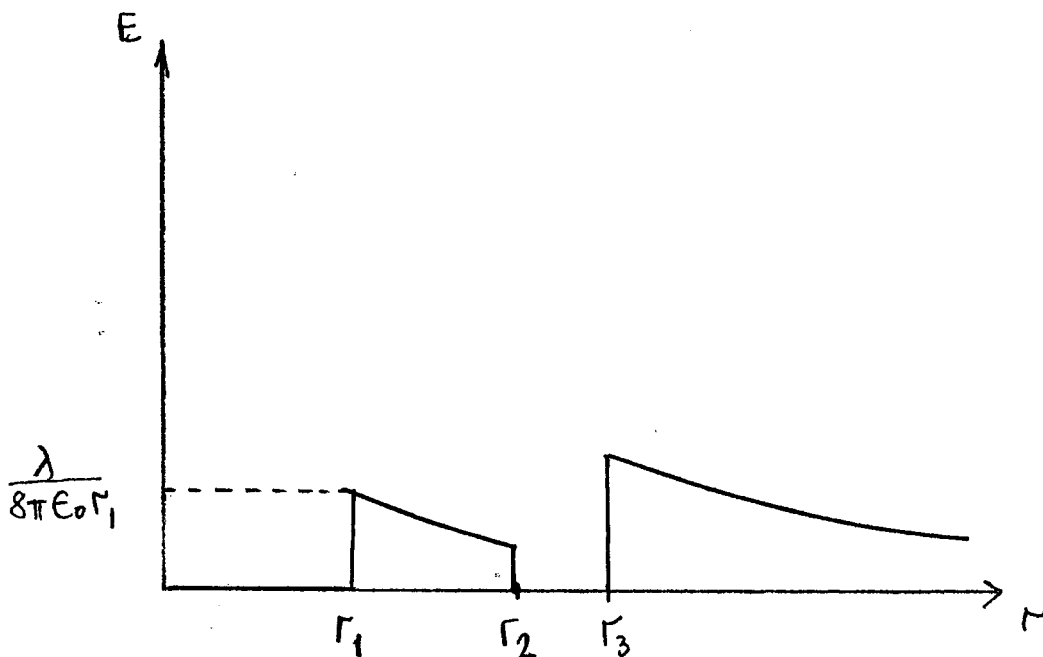
- c) For $r > r_3$ må vi få samme uttrykk som i pkt a. Siden innelukket ledning er den samme, dvs:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{for } r > r_3$$



Skisse av elektrisk felt som funksjon av r

- d) Betrakningen blir den samme som i pkt a, b og c, bare at man for området mellom kjernen og skallet må benytte Gauss' lov gjeldende for et dielektrikum (oppgitt). Med $\epsilon = 4.0 \epsilon_0$, vil feltet mellom kjerne og skall reduseres med en faktor 4, mens feltet forørig blir som i skissen i pkt c.



c) Ampère's lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{enc}}$

Velger en integrasjonsveg som en sirkel med radius r og senter i kjernen ($r_1 < r < r_2$). Magnetfeltet $\vec{B}(r)$ er i ethvert punkt på sirkellinjen rettet tangentielt til denne og med retning slik at strømretningen og magnetfeltet danner et høyrehåndssystem.

Ampère's lov gir da:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \cdot r d\theta = 2\pi r B = \mu_0 I_0 \Rightarrow B = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}}}$$

f) Magnetfeltet inne i kjernen ($r < r_1$) er gitt ved samme uttrykk som i pkt e) bare at det må tas hensyn til at integrasjonsvegen omkryller kun en del av den totale strøm I_0 , gitt ved:

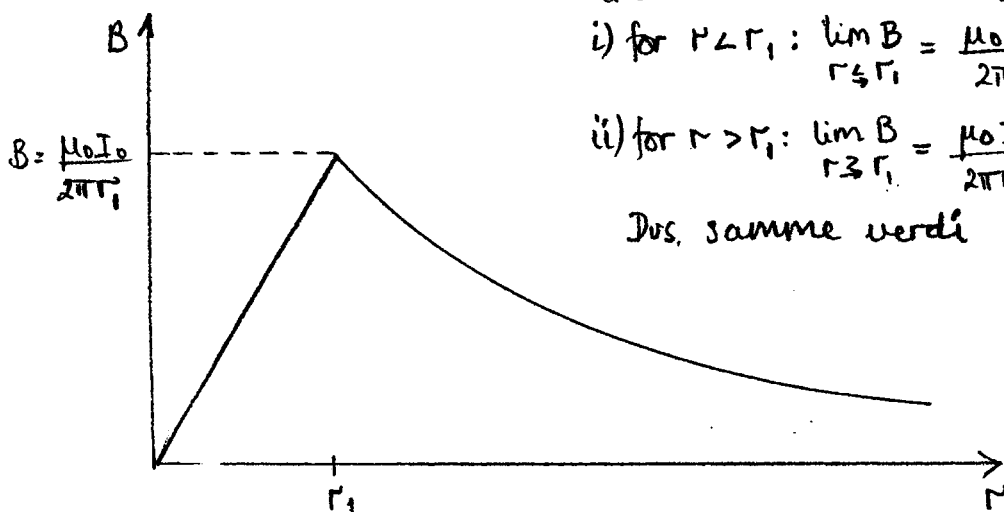
$$I_r = \frac{I_0}{\pi r_1^2} \cdot \pi r^2 = I_0 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$

og

$$B = \frac{\mu_0 I_0 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{2\pi r} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi r_1^2}}}$$

Siden det ikke går noen strøm i skallet, vil dette ikke ha noen innflytelse på magnetfeltet registrert for

$$r > r_2$$



Grenseverdi når $r \rightarrow r_1$

i) for $r < r_1$: $\lim_{r \rightarrow r_1} B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1}$

ii) for $r > r_1$: $\lim_{r \rightarrow r_1} B = \frac{\mu_0 I_0 r_1}{2\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1}$

Dvs. samme verdi

Oppgave 2

a) Kirchoffs andre lov gir for $t > 0$

$$-\frac{q}{C} + Ri = 0 \quad (1)$$

Med $i = -\frac{dq}{dt}$:

$$q/C + R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q \quad (2)$$

som har løsning:

$$q = \text{konst} e^{-t/RC} \quad (3)$$

For $t = 0$

$$q = \text{konst} = Q_0$$

og dermed:

$$\underline{\underline{q = Q_0 e^{-t/RC}}} \quad (4)$$

og:

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = \underline{\underline{I_0 e^{-t/RC}}} \quad (5)$$

der vi kan sætte $I_0 \equiv Q_0/RC$.

b) Kirchhoffs andre lov gir:

$$Ri + q/C = V_0 \cos \omega t \quad (6)$$

og med $i = \frac{dq}{dt}$:

$$\underline{R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_0 \cos \omega t} \quad (7)$$

Ved kompleks representasjon nytter vi:

$$\cos \omega t \rightarrow e^{j\omega t}$$

og dermed er tilsvarende komplekse ligning:

$$\underline{R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_0 e^{j\omega t}} \quad (8)$$

c) Prøveløsning til lign. (8):

$$q = q_0 e^{j\omega t} \quad (9)$$

gir:

$$j\omega R q_0 e^{j\omega t} + \frac{1}{C} q_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

g videre:

$$g_0 = \frac{V_0}{j\omega R + 1/C} \quad (10)$$

Dermed:

$$i = \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} g = \frac{d}{dt} (g_0 e^{j\omega t})$$

$$= j\omega g_0 e^{j\omega t} = i_0 e^{j\omega t} \quad (11)$$

der:

$$i_0 = j\omega g_0 = \frac{j\omega V_0}{j\omega R + 1/C} = \frac{V_0}{R - j/\omega C}$$

↑
1/j = -j

$$= |i_0| e^{j\varphi} \quad (12)$$

der

$$|i_0| = \frac{V_0}{[R^2 + (1/\omega C)^2]^{1/2}} \quad (13)$$

og

$$\tan \varphi = - \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{\omega RC}$$

des

$$\underline{\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)} \quad (14)$$

På reell form:

$$\underline{i = |i_0| \cos(\omega t + \varphi)} \quad (15)$$

der $|i_0|$ er gitt ved (13) og φ ved (14).

d) Impedans for kondensatoren er $\frac{1}{j\omega C}$. Impedans for motstanden er R . Den påtrykte spenningen vil fordele seg i forhold til impedansene. For små ω blir $\frac{1}{j\omega C}$ stor og kretsen vil derfor virke som et lavpassfilter dersom vi tar spenningen ut over kondensatoren.

Spenningsfallet V_{ut} over kondensatoren er gitt ved kompleks representasjon:

$$V_{ut} = \frac{q}{C} = \frac{V_0/C}{j\omega R + 1/C} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{1 + j\omega RC} e^{j\omega t} \quad (16)$$

↑
($q_0(t)$)

g:

$$|V_{ut}| = \frac{V_0}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{1/2}} \quad (17)$$

↳ derfor:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{V_{ut}}{V_0} = \frac{V_0}{V_0} = \underline{\underline{1}} \quad \text{g. e. d.} \quad (18)$$

For bl. strekkelig store ω :

$$\frac{|V_{ut}|}{V_0} \approx \frac{1}{(\omega^2 R^2 C^2)^{1/2}} = \frac{1}{\omega R C} \approx \underline{\underline{\frac{1}{\omega}}} \quad (19)$$

g. e. d.

Med spole i tillegg:

Impedans for de tre komponentene i kretsen er $j\omega L$, R og $\frac{1}{j\omega C}$.

For bl. strekkelig store ω vil derfor nesten all spenning bli liggende over spolen. Forholdet $\frac{|V_{ut}|}{V_0}$ kan da tilnærmes med forholdet mellom impedansene $\frac{1}{j\omega C}$ og $j\omega L$ som gir:

$$\frac{1/j\omega C}{j\omega L} = \frac{1}{-\omega^2 LC} \propto \frac{1}{\omega^2} \quad (20)$$

Detta vil si när ω ökar
okämbeligt, vil högre frekvenser
bli filtrert bort mer effektivt,
og kretsen virker altså mer
effektivt enn uten spole som
lowpass filter.

Oppgave 3

$$a) \quad v_f = \omega/k = (gk)^{1/2}/k = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \underline{\underline{\left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)^{1/2}}} \quad (1)$$

For $\lambda = 5,00 \text{ m}$:

$$v_f = \left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{5,00 \cdot 9,82}{2\pi}\right)^{1/2} \text{ m/s} \approx \underline{\underline{2,80 \text{ m/s}}}$$

For $\lambda = 10,0 \text{ m}$:

$$v_f = \left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{10,0 \cdot 9,82}{2\pi}\right)^{1/2} \text{ m/s} \approx \underline{\underline{3,95 \text{ m/s}}}$$

$$b) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (gk)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} v_f}} \quad (2)$$

For $\lambda = 5,00 \text{ m}$:

$$v_g = \frac{1}{2} v_f \approx \frac{1}{2} \cdot 2,80 \text{ m/s} = \underline{\underline{1,40 \text{ m/s}}}$$

For $\lambda = 10,0 \text{ m}$:

$$v_g = \frac{1}{2} v_f \approx \frac{1}{2} \cdot 3,95 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{1,98 \text{ m/s}}}$$

- c) Bølgepakke forplander seg med gruppehastighet og det gjør også Fourierkomponenter i bølgepakke.
 Forskjell Δt i ankomsttid blir derfor:

$$\Delta t = \frac{2,00 \text{ km}}{v_{g1} = 5,00 \text{ m}} - \frac{2,00 \text{ km}}{v_{g2} = 10,0 \text{ m}}$$

$$\approx \frac{2,00 \text{ km}}{1,40 \text{ m/s}} - \frac{2,00 \text{ km}}{1,98 \text{ m/s}}$$

$$\approx (1429 - 1010) \text{ s} = 419 \text{ s} = \underline{\underline{6 \text{ min } 59 \text{ s}}}$$

- d) For dette tilfellet har vi

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gD} \quad \text{uavhengig } k$$

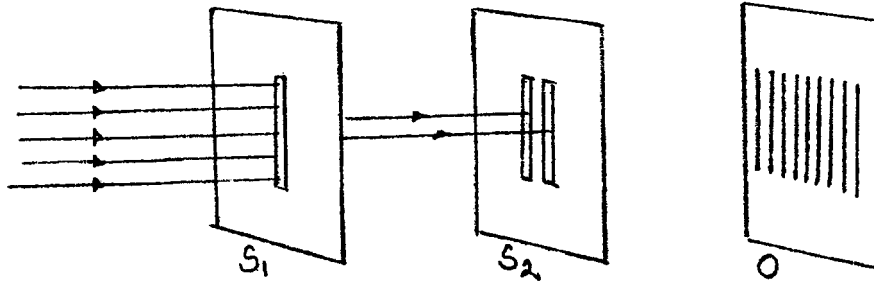
g:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gD} = v_f \quad \text{uavhengig } k$$

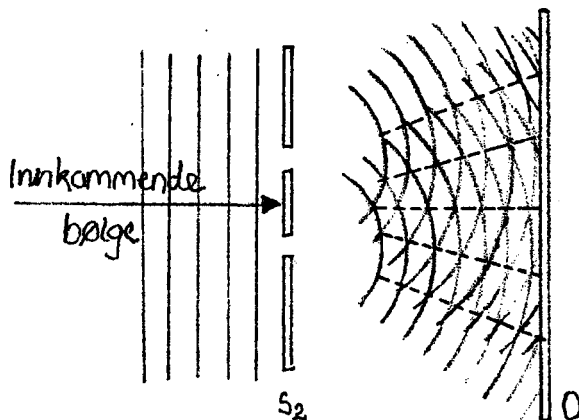
Altså forplanter alle Fourierkomponenter seg med samme hastighet og bølgepakke forandrer ^{derfor} ikke utstrekning mens det forplanter seg.

Oppgave 4

a) Prinsippskisse av Youngs tospalteeksperiment:



Lys fra en lyskilde (Young brukte sollys) sendes gjennom en spalte S_1 for å fremskaffe en smal strålebunt av parallelle stråler. Denne strålebunten faller på en dobbeltspalt S_2 . Når avstanden mellom åpningene i dobbeltspalten er liten nok, vil vi på observasjons skjermen O se et mønster bestående av flere linjer. Young forklarte dette som et bølge-interferensfenomen. Følgende modell viser hvordan:



I figuren ovenfor antas innkommende lys å ha periodisk bølgenatur. Bølgen vil bli diffraktet i dobbeltspaltens åpninger og bre seg ut som to delbølger med halvsirkler som bølgefronter. De stiplede linjene i området mellom S_2 og O angir rette linjer trukket gjennom posisjonene hvor konstruktiv interferens mellom delbølgene gir maksimal amplitude for resultatbølgen. Merk spesielt at bølgemodellen gir et maksimum også rett bak "midtlisstopperen". Dette er i samsvar med hva som observeres eksperimentelt og viser at lys i en forstand må ha periodisk bølgenatur.

b) Betingelsen for å få interferensstripe er at "brynings"-vinkelen θ oppfyller

$$n d_m = d \sin \theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

der d_m er middelbøgelengde og $d \sin \theta$ ganglengdeforskjell mellom lys fra de to spaltene.

Interferensmønsteret nær $\theta = 0$ vil ikke bli påvirket av om $l_c = 5 \mu\text{m}$ eller om $l_c = 5 \text{ km}$, fordi ganglengdeforskjellen $d \sin \theta$ da er vesentlig mindre enn l_c . Siden l_c ikke påvirker middelbøgelengden vil ikke posisjonen til intensitetsmaksima endres om kohærens lengden endres. Men når $d \sin \theta$ ^{med $l_c = 5 \mu\text{m}$} blir av samme størrelsesorden som l_c , dvs når:

$$d \sin \theta \approx \pm l_c$$

eller

$$\sin \theta \approx \pm \frac{l_c}{d} = \pm \frac{5 \mu\text{m}}{20 \mu\text{m}} = \pm 0,05$$

↑
(for $l_c = 5 \mu\text{m}$)

begynner det å bli mindre
 kontrast mellom lyse og mørke
 striper. Når sin θ nærmer seg
 ± 1 vil ganglengdeforskjellen nærme seg
 $100\mu\text{m}$ dvs $20\lambda_c$, og lys fra
 de to spaltene vil da på
 observasjonsskjermen være blåmet
 inkoherent og stripenøstret utvisket.

Ganglengdeforskjellen kan maksimalt
 bli d , og er $\lambda_c = 5\text{km}$, er

$\lambda_c \gg$ ganglengdeforskjell for alle θ .

Vi får derfor tydelige interferens-
 striper på observasjonsskjermen for
 alle θ .

$$c) \quad \theta_c = \lim_{\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \theta_1 \quad \text{eller} \quad \sin \theta_c = \lim_{\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin \theta_1 \quad (1)$$

Snells lov gir:

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 \quad (2)$$

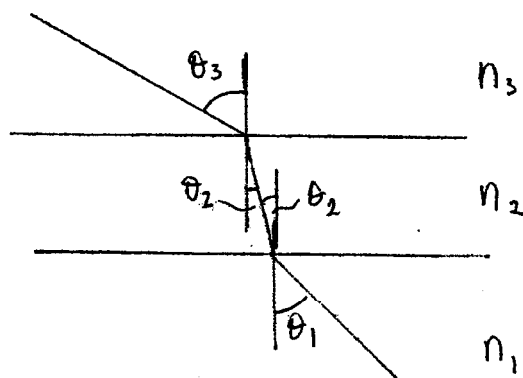
(2) innsatt i (1) gir:

$$\sin \theta_c = \lim_{\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot 1$$

eller

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

d)



Vi har fra Snells brytningslov:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$\text{og} \quad n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \quad (4)$$

(3) og (4) gir

$$n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3 \quad (5)$$

Dersom strålen såvidt skal unnsnippe er θ_3 lik 90° og vi får fra (5):

$$\sin \theta_1 = \frac{n_3}{n_1} = \frac{1,00}{1,33} = 0,752$$

og

$\theta_1 = 48,8^\circ$

Utleddningen ovenfor bygger bare på at vi ikke får totalrefleksjon ved overgang medium 1 til medium 2. Så sant $n_2 > n_3 = 1$, som alltid er oppfylt, vil vi aldri få totalrefleksjon der dersom vi bare såvidt får totalrefleksjon fra medium 2 til medium 3.

e) Vi får faseforskyvning på π ved refleksjon fra begge grenseflater ($n_{\text{luft}} < n_{\text{olje}} < n_{\text{vann}}$). Betingelsen for forsterkning, dvs. konstruktiv interferens mellom strålen reflektert fra olje/luft grenseflaten og vann/olje-grenseflaten er derfor:

$$2d = m \lambda_{\text{olje}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

der λ_{olje} er bølgelengden i olje for lys som i luft har bølgelengde λ_{luft} .

Her er

$$\lambda_{\text{olje}} = \lambda_{\text{luft}} / n_{\text{olje}} \quad (7)$$

Vi har tilleggsbetingelsen at d skal ha den minste verdi som tillater forsterkning av rød-oransje lys og fiolett lys. Da rød-oransje lys har lengre bølgelengde λ^R enn fiolett lys λ^F , får vi følgende to

betingelser på d og m :

$$2d = m \lambda_{\text{olje}}^R \quad (8a)$$

$$2d = (m+1) \lambda_{\text{olje}}^F \quad (8b)$$

Løses (8a,b) m.h.p. d får vi:

$$2d = \left(\frac{2d}{\lambda_{\text{olje}}^R} + 1 \right) \lambda_{\text{olje}}^F$$

$$2d \left(1 - \frac{\lambda_{\text{olje}}^F}{\lambda_{\text{olje}}^R} \right) = \lambda_{\text{olje}}^F$$

$$d = \frac{\lambda_{\text{olje}}^F}{2 \left(1 - \frac{\lambda_{\text{olje}}^F}{\lambda_{\text{olje}}^R} \right)} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\text{olje}}^F \lambda_{\text{olje}}^R}{\lambda_{\text{olje}}^R - \lambda_{\text{olje}}^F}$$

Ved hjælp af (7) kan dette skrives:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n_{\text{olje}}} \frac{\lambda_{\text{luft}}^F \lambda_{\text{luft}}^R}{\lambda_{\text{luft}}^R - \lambda_{\text{luft}}^F}$$

som med tallverdiene $n_{\text{olje}} = 1.30$, $\lambda_{\text{luft}}^F = 430 \text{ nm}$ og $\lambda_{\text{luft}}^R = 645 \text{ nm}$ gir at

$$d \approx 496 \text{ nm}$$

(Fra lign (8a) eller (8b) ser vi at $m = 2$)