NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN I FAG SIF 4008 FYSIKK

Mandag 7. mai 2001

kl. 0900-1500

Bokmål

Hjelpemidler: B2

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Sensuren kan ventes i uke 22

<u>Oppgave 1</u>

a) Coulombs lov for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ i vakuum i en avstand r fra en punktladning q lyder:

$$\vec{E} = \frac{q}{4pe_0 r^2}\hat{e}_r \tag{1}$$

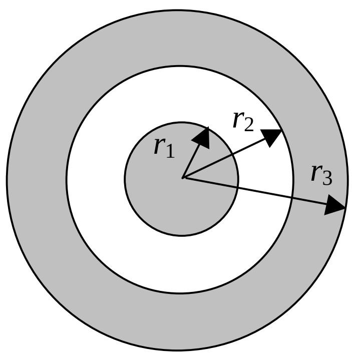
der e_0 er permittiviteten i vakuum og $\hat{e}_r \equiv \vec{r}\,/\,r$.
Vis at Gauss' lov for vakuum følger fra (1) for det spesialtilfellet at den lukkede flaten er en kuleflate og at den innelukkede ladningen kun er én punktladning plassert i sentrum for kuleflaten !

I de neste to punktene betrakter vi en massiv kule med radius r_1 laget av et ledende materiale. Utenfor kulen er det luft (permittiviteten for luft skal regnes lik permittiviteten e_0 for vakuum). Avstanden fra kulas sentrum kalles r. Kula har nettoladning Q_0.

b) Hva er det elektriske feltet inne i kula ? Begrunn svaret !

c) Finn $E(r)$ (uttrykt ved Q_0, r og e_0) også utenfor kula og lag en skisse av $E(r)$ for alle verdier av r !

I de to siste punktene betrakter vi en massiv kule av ledende materiale fortsatt med radius r_1 og nettoladning Q_0, men nå også omgitt av et konsentrisk skall av ledende materiale med indre radius r_2 og ytre radius r_3. Skallet har null nettoladning. Rommet mellom den massive kula og kuleskallet er fylt av et dielektrisk materiale med relativ permittivitet $e_r = 5{,}0$. Avstanden fra sentrum av kula kalles fortsatt r. Et snitt er vist nedenfor.



d) Finn $E(r)$ (uttrykt ved Q_0, r og e_0) og lag en skisse av $E(r)$ for alle verdier av r !

e) Finn potensialet $V(r)$ (uttrykt ved Q_0, r og e_0) og lag en skisse av $V(r)$ for alle verdier av r ! (Definer $V(r) = 0$ for $r = \infty$!)

Oppgitt

- For en vilkårlig lukket flate (i vakuum) som omhyller en samling ladninger, gjelder Gauss' lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{e_0}$$

der $\vec{E}$ er elektrisk felt gjennom flaten og Q_{encl} er algebraisk sum av ladning innenfor den lukkede flaten. e_0 er permittivitet i vakuum.

- For en vilkårlig lukket flate i et dielektrikum med permittivitet $e = e_{\text{r}} e_0$ der e_{r} er relativ permittivitet, modifiseres Gauss' lov til:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl, fri}}}{e}$$

der $Q_{\text{encl, fri}}$ er algebraisk sum av frie ladninger innenfor den lukkede flaten.

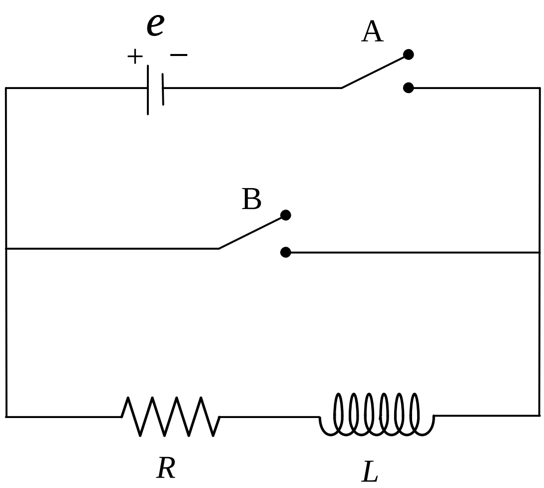
- For sentralsymmetrisk tilfelle er sammenhengen mellom elektrisk felt $\vec{E}(r)$ og elektrisk potensial $V(r)$ gitt ved:

$$\vec{E}(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\ \hat{e}_r$$

der $\hat{e}_r \equiv \vec{r} / r$.

<u>Oppgave 2</u>

I de to første punktene betrakter vi en krets som vist på figuren nedenfor.



Kretsen består av en likespenningskilde (som vi regner ideell, dvs uten indre motstand) med elektromotorisk spenning e, en ren resistans med motstand R og en spole med induktans L.
A og B er to brytere.

Med bryteren B åpen og bryteren A lukket er Kirchhoffs andre lov for kretsen:

$$e = iR + L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

der t er tiden, i er strømmen, $L\frac{di}{dt}$ og iR er spenningsfallene henholdsvis over spolen med induktans L og resistansen R.

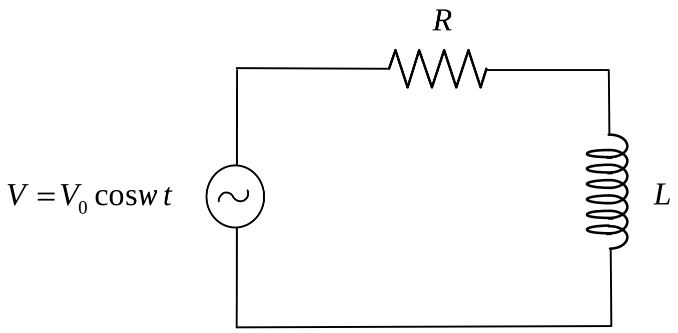
a) Vi tenker oss først følgende situasjon: Begge bryterne har vært åpne, men ved tiden $t = 0$ lukkes bryteren A mens B fortsatt forblir åpen. Vis at strømmen for $t > 0$ da er gitt ved:

$$i = \frac{e}{R}\left(1 - e^{-t/t}\right) \tag{2}$$

der $t \equiv L/R$.

b) Vi tenker oss så at bryteren A har vært lukket og B åpen så lenge at strømmen i kretsen er blitt e/R. Ved tiden $t = 0$ åpnes bryteren A samtidig som bryteren B lukkes. Finn strømmen i kretsen for $t > 0$!

c) Vi betrakter så en tilsvarende krets som den ovenfor, men med en påtrykt veksel-elektromotorisk spenning $V = V_0 \cos w t$ (der w er vinkelfrekvens) i stedet for likespenning og uten bryterne A og B.



Kirchhoffs andre lov for denne kretsen på reell form er:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \cos w t \tag{3}$$

Skriv opp den komplekse representasjonen av denne ligningen og bestem i_0 (uttrykt ved w , R, L og V_0) i den komplekse representasjonen:

$$i = i_0 e^{jwt} \tag{4}$$

av den stasjonære løsningen for strømmen i kretsen !

d) Finn også den stasjonære løsningen for strømmen i for kretsen i punkt c på reell form (uttrykt ved w , R, L og V_0) !

Oppgave 3

Vi skal i de tre første punktene i denne oppgaven betrakte overflatebølger som forplanter seg på grenseflaten vann/luft. Vi antar for alle de tre første punktene at bølgelengde l og vanndybde begge er store nok til at vi for fasehastighet v_{f} med god tilnærmelse har:

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{g}{2p} T \qquad (1)$$

der T er periodetid til aktuell cosinusbølge eller fourierkomponent og g = 9,82 m/s^2.

a) Finn ut fra ligning (1) sammenhengen mellom bølgelengden l og periodetiden T for en cosinusbølge eller fourierkomponent ! Finn også tilsvarende sammenheng mellom vinkelfrekvensen w og angulært bølgetall $k = 2p / l$!

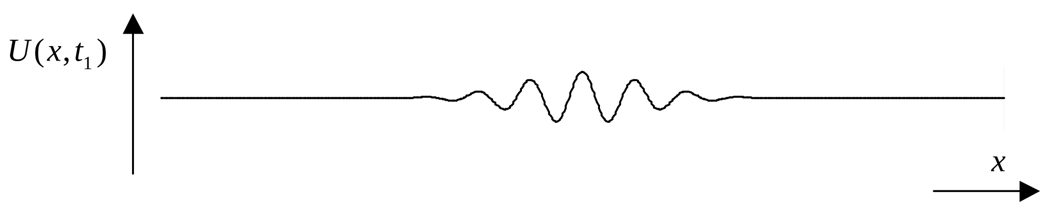
b) Vis at vi i det tilfellet vi her betrakter har:

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{f}} \qquad (2)$$

for enhver cosinusbølge eller fourierkomponent !

c) Et bølgetog med utsving $U(x,t)$ som vist på figuren, er generert på en vann/luft-grenseflate av en bølgegenerator i en bølgerenne (dvs det forplanter seg i én dimensjon). Bølgetoget har fourierkomponenter (frekvenskomponenter) w sentrert om frekvensen $w_0 = \sqrt{g k_0}$ med $k_0 = 2p / l_0$ der $l_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Vi antar som en brukbar tilnærmelse at vi kan regne $\Delta w = \mathrm{konstant} \cdot \Delta k$ for de fourierkomponentene som bølgetoget består av, dvs vi neglisjerer at omhyllingskurven til bølgetoget forandrer form når bølgetoget forplanter seg bortover bølgerenna. Det er en definisjonssak akkurat hvor langt bølgetoget er. Vi definerer det til å ha lengde $6\, l_0 = 6 \cdot 0{,}50\ \mathrm{m} = 3{,}00\ \mathrm{m}$.

Når bølgetoget går bortover overflaten ser det ut som nye bølger med $l \approx l_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}$ oppstår i bakkant av bølgetoget og får økende amplitude mens de forplanter seg framover i bølgetoget inntil de har nådd sentrum. Deretter minker de til amplituden igjen blir null i framkant av bølgetoget.



Finn tiden Δt fra en slik bølge oppstår i bakkant av bølgetoget til den dør (dvs amplituden minker til null) i framkant av bølgetoget !

Vi skal i de to siste punktene i denne oppgaven betrakte transversale utsving $D(x,t)$ som forplanter seg som bølger på en streng som er strekt i x-retning. Strengen har masse pr lengdeenhet $m = 0{,}010\ \mathrm{kg/m}$ og stramming $F_\mathrm{T} = 25\ \mathrm{N}$.
Vi antar at utsvingene $D(x,t)$ er så små og at forholdene for øvrig er slik at bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{m}{F_\mathrm{T}} \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

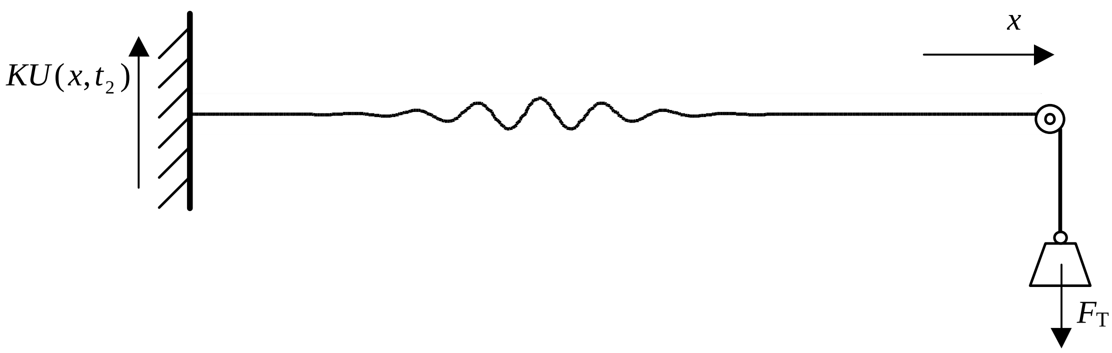
gjelder for de tilfeller vi betrakter.

d) Vis at bølgefunksjonene:

$$D(x,t) = A_0 \cos(kx - w t + j\ ) \tag{4}$$

oppfyller bølgeligningen (3) for alle reelle verdier av konstantene A_0 og j og alle reelle verdier av w og k som er slik at $w = (50\ \mathrm{m/s}) \cdot k$.

e) Vi betrakter så et bølgetog generert på strengen som har utsving gitt ved $KU(x,t)$.
Vi antar at $U(x,t)$ for et gitt tidspunkt er det utsving som vi for et gitt tidspunkt hadde for bølgetoget i punkt c. K er en konstant vesentlig mindre enn 1. (Denne antagelsen betyr at dette bølgetoget består av de samme bølgelengdekomponenter som det i punkt c, sentrert om bølgelengden $l \approx l_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Dette bølgetoget defineres også til å være $6\ l_0 = 6 \cdot 0{,}50\ \mathrm{m} = 3{,}00\ \mathrm{m}$ langt.)



Vil det når dette bølgetoget forplanter seg bortover strengen, se ut som nye bølger med $l \approx l_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}$ oppstår i bakkant og dør i framkant av bølgetoget ? (Vi kan tenke oss at bølgepakkens forplantning blir tatt opp på film som kan kjøres med langsom hastighet for observasjon.)
Hvis nei, begrunn svaret utførlig !
Hvis ja, finn tiden Δt_streng som går fra en slik komponent ser ut til å oppstå i bakkant til den dør i framkant av bølgetoget !

Oppgitt

- Fasehastighet v_f er definert ved:

$$v_f \equiv \frac{w}{k}$$

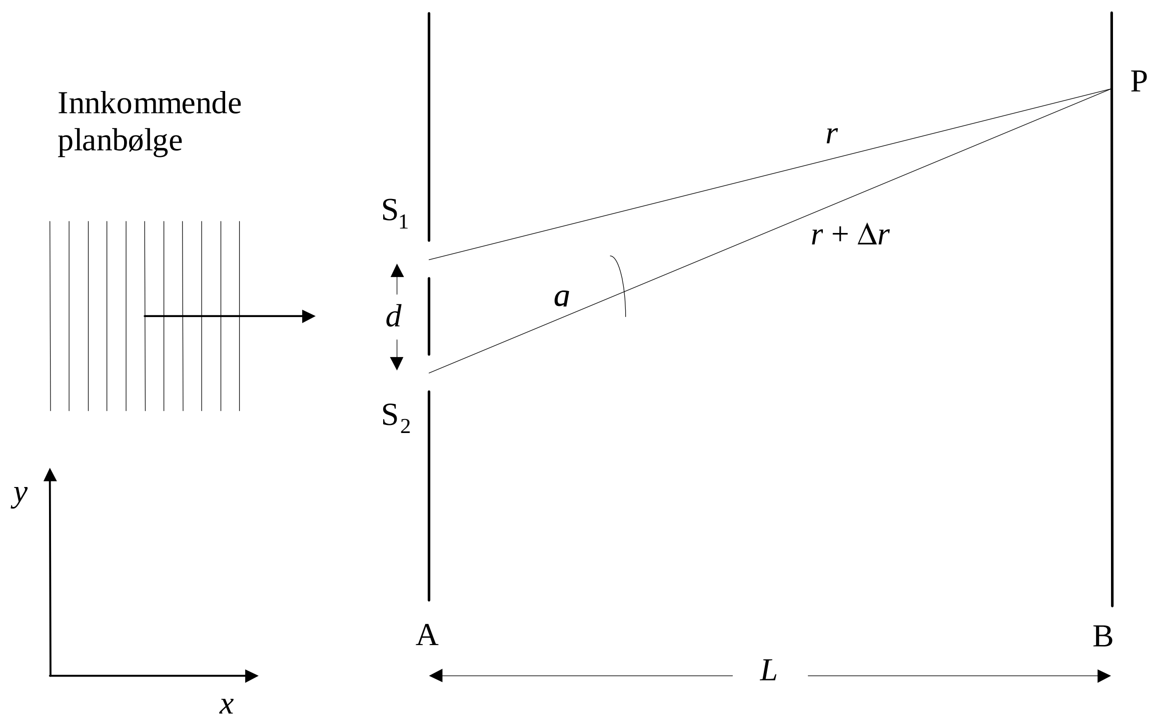
- Gruppehastighet v_g er definert ved:

$$v_g \equiv \frac{dw}{dk}$$

Merk at når vi har dispersjon, må $\frac{dw}{dk}$ tas for aktuell k-verdi.

Oppgave 4

Vi skal i denne oppgaven betrakte en planbølge med lys (som er lineærpolarisert) som kommer normalt inn mot en skjerm A med to spalter S_1 og S_2. Interferensmønsteret dannet av lyset som passerer S_1 og S_2 blir registrert på en skjerm B plassert en avstand L fra A, som vist på figuren nedenfor.



Vi antar at spaltene S_1 og S_2 er like og så smale at hver av dem (i samsvar med Huygens' prinsipp) er utgangspunktet for en bølge med en halvsirkel som tverrsnitt. Det vil si, vi antar at bølgene fra de to spaltene er sylinderbølger og at spaltene er så lange at vi ikke har problem med ende-effekter der vi observerer lysfordelingen på observasjonsskjermen. I hele oppgaven skal vi altså bare regne på det som skjer i det tverrsnitt som papirplanet representerer, der bølgene fra S_1 og S_2 har halvsirkler som bølgefronter. Vi antar for hele oppgaven at $L \gg d$ slik at lysstrålen fra S_1 til et punkt P på observasjonsskjermen kan betraktes å være parallell med lysstrålen fra S_2 til P (uavhengig av P's plassering).

Vi antar videre for hele oppgaven at:

- Det innkommende lyset er fullstendig koherent,

og for punkt a og b:

- De elektriske feltene henholdsvis fra spalt S_1 og fra spalt S_2, kan i et punkt P på observasjonsskjermen (dvs at lyset er bøyd vinkelen q) uttrykkes ved:

  $$E_1 = E_{10} \cos[kr - wt - j]$$

  $$E_2 = E_{20} \cos[k(r + \Delta r) - wt - j]$$

  der $k = 2p / l$, l er bølgelengden, w er vinkelfrekvensen, j er en fasekonstant (som vi ikke har bestemt), r er avstanden fra S_1 til P og $r + \Delta r$ er avstanden fra S_2 til P. E_{10} og E_{20} er avhengige av henholdsvis r og $r + \Delta r$. Men siden vi betrakter $L \gg d$ kan vi med god tilnærmelse sette:

  $$E_{10} = E_{20} \equiv E_0 \qquad \text{(uavhengig av P's plassering på skjermen)}$$

a) Vis at det totale feltet på observasjonsskjermen som funksjon av vinkelen q er gitt ved:

$$E_q = 2E_0 \cos\left(\frac{kd \sin q}{2}\right) \cos[k(r + \tfrac{1}{2} d \sin q) - wt - j]$$

b) Finn ut fra E_q gitt i punkt a, lysets intensitetsfordeling på observasjonsskjermen som funksjon av vinkelen q !
Finn også de vinkler q som gir maksimum lysintensitet (uttrykt ved d og l) !

Vi betrakter i fortsettelsen så små bøyningsvinkler q at $\sin q \approx \tan q \approx q$, dvs at vertikal-avstander på observasjonsskjermen B målt ut fra midtnormalen til spalteåpningene i skjerm A, kan uttrykkes ved $y = qL$. Vi antar videre at spalteavstanden d er 50,0 µm og at observasjonsskjermen B er plassert i en avstand L = 50,0 cm.

c) Vi lar nå S_1 være tildekket av en glassplate (glassplaten plasseres foran S_1, dvs på den siden av skjermen A som vender mot lyskilden) mens S_2 ikke er tildekket. Vi antar at sideflatene til glassplaten er parallelle med hverandre og fullstendig plane. Vi neglisjerer refleksjon fra glassplaten og ser ellers bort fra diffraksjon pga. kanten av glassplaten mellom S_1 og S_2. Med glassplaten på plass observeres det at interferensmønsteret på observasjonsskjermen blir flyttet slik at mønsterets nullte-ordens maksimum nå har samme posisjon som mønsterets øvre første-ordens maksimum hadde før glassplaten ble lagt på.
Finn den tykkelse glassplaten må ha for at dette skal være tilfelle dersom det innkommende lyset har bølgelengde $l = 5{,}00 \cdot 10^2$ nm og brytningsindeksen for glassplaten (krystallglass med bly) er 1,98 !

d) Vi antar så at hele oppsettet fra punkt c senkes ned i en gjennomsiktig væske med ukjent brytningsindeks. Det observeres da at nullte ordens maksimum i interferensmønsteret forflyttes halvveis tilbake til posisjonen det hadde før glassplaten ble lagt på og oppsettet ble senket ned i den ukjente væsken. Hva er da avstanden mellom to nabo-interferensmaksima ?
(Vi antar at lyskilden har samme frekvens som i punkt c, dvs tilsvarende at bølgelengden i luft er $5{,}00 \cdot 10^2$ nm)

Oppgitt

- $$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

- Intensiteten for en periodisk elektromagnetisk bølge i vakuum er gitt ved:

  $$I = e_0 c \overline{E^2}$$

  der E er det elektriske feltet til bølgen, $\overline{E^2}$ er E^2 midlet over en periode, e_0 er permittiviteten i vakuum og c er lyshastigheten i vakuum.

  Dersom $E = E_0 \cos(w t + j')$ der j' er en konstant (dvs uavhengig av t) har vi:

  $$\overline{E^2} = \tfrac{1}{2} E_0^2$$

- Når lyshastigheten i vakuum (eller luft) kalles c, så er lyshastigheten (dvs fase-hastigheten for lys) c_s i et stoff med brytningsindeks n gitt ved $c_s = c/n$, og dersom vakuumbølgelengden er l, så er bølgelengden l_s i stoffet gitt ved $l_s = l/n$.