LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN SIF4008 7/5-01

Oppgave 1

a) Vi integrerer det elektriske feltet (1) fra en punkt ladning over en kuleflate lagt slik at punktladningen er plassert i sentrum for kuleflaten:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{Q.E.D.}$$

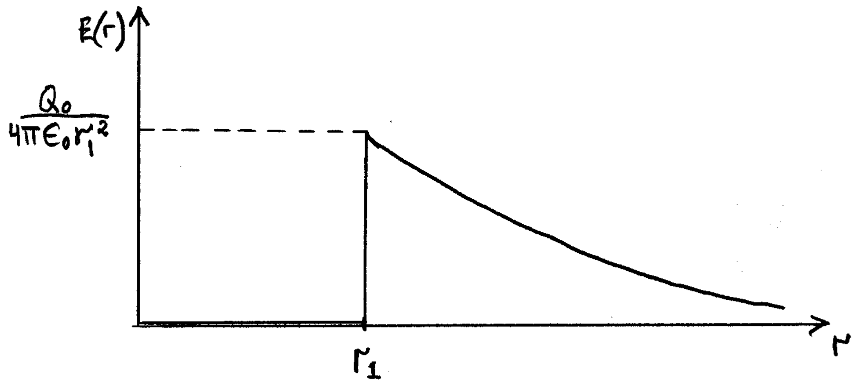
Fordi feltet på kuleflata er parallelt til overflate-normalen

Fordi feltet er konstant på en kuleflate med radius r

b) Inne i kula, som er laget av et ledende materiale, vil det elektriske feltet være null. Hvis ikke ville ladning bevege seg inntil stasjonær tilstand var inntrådt. Dette betyr at all ladning vil samles på overflaten og feltlinjene står normalt på den.

c) For $r > r_1$ må vi få samme felt $E(r)$ som fra en punktladning Q_0 plassert i kulas sentrum. Dette følger av Gauss lov fordi en kuleflate med radius r da vil innelukke samme totalladning Q_0, dvs.

$$E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{for } r > r_1$$



$r < r_1$

d) Feltet inne i et ledende materiale er null (som i pkt b)

$r_1 < r < r_2$

Fra Gauss' lov for et dielektrikum følger at:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_0/\epsilon \Rightarrow E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r^2}$$

Altså er feltet redusert en faktor 5 i forhold til hva det ville vært med luft mellom kule og kuleskallet

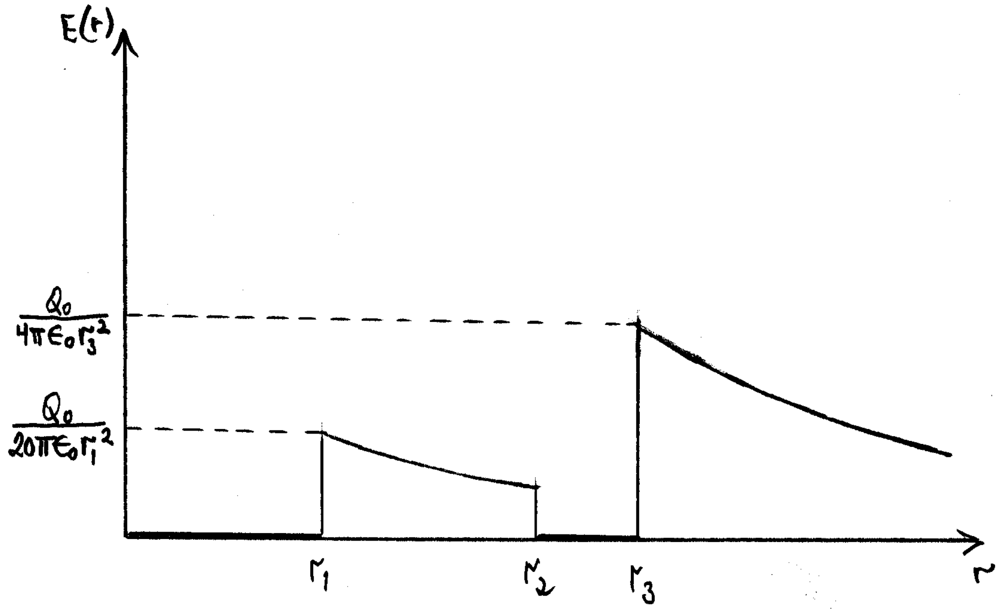
$r_2 < r < r_3$

$E(r) = 0$ (som for $r < r_1$)

$r > r_3$

Fra Gauss' lov for vakuum følger:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_0/\epsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



c) Fra oppgitt relasjon for sentralsymmetrisk potensial følger:

$$\vec{E}(r') = -\frac{\partial V(r')}{\partial r'}\hat{e}_r \Rightarrow E(r') = -\frac{\partial V(r')}{\partial r'} \Rightarrow dV(r') = -E(r')dr'$$

Integreres feltet fra $r'=r$ til $r'=\infty$ finner vi at

$$V(\infty) - V(r) = -\int_r^\infty E(r')\,dr'$$

Defineres $V(\infty)=0$ følger:

$$\underline{V(r) = \int_r^\infty E(r')\,dr'}$$

$\underline{r > r_3}$

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'^2}dr' = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'}\Big|_r^\infty = \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}}}$$

$\underline{r_2 < r < r_3}$

$$V(r) = \int_r^{r_3} 0\cdot dr' + \int_{r_3}^\infty \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'^2}dr' = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'}\Big|_{r_3}^\infty = \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r_3}}}$$

$\underline{r_1 < r < r_2}$

$$V(r) = \int_r^{r_2} \frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r'^2}dr' + \int_{r_2}^{r_3} 0\cdot dr' + \int_{r_3}^\infty \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'^2}dr'$$

$$= \frac{-Q_0}{20\pi\epsilon_0 r'}\Big|_r^{r_2} + 0 + \frac{-Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'}\Big|_{r_3}^\infty$$

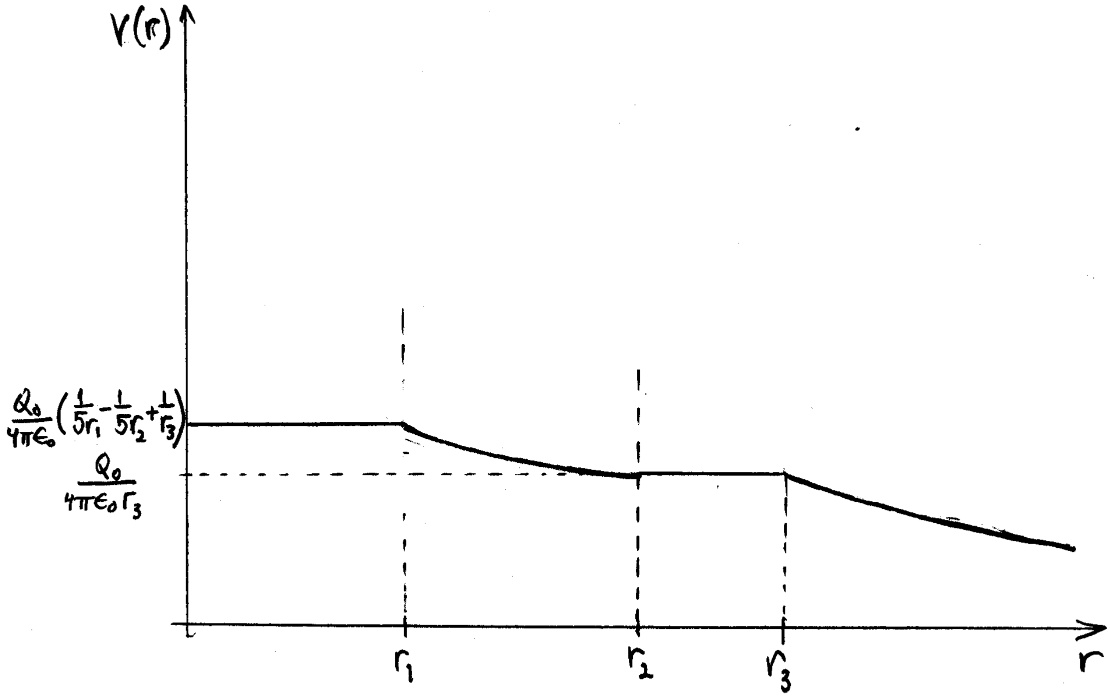
$$= -\frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r_3} = \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{5r} - \frac{1}{5r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}}$$

$r < r_1$

$$V(r) = \int_r^{r_1} 0\, dr' + \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r'^2} dr' + \int_{r_2}^{r_3} 0 \cdot dr' + \int_{r_3}^{\infty} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr'$$

$$= 0 + \left.\frac{-Q_0}{20\pi\epsilon_0 r'}\right|_{r_1}^{r_2} + 0 + \left.\frac{-Q_0}{4\pi\epsilon_0 r'}\right|_{r_3}^{\infty}$$

$$= \frac{-Q_0}{20\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q_0}{20\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r_3} = \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{5r_1} - \frac{1}{5r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}}$$



Oppgave 2

For å vise at strømmen $i(t)$ må være slik som gitt i lign. (2) i oppgaveteksten må vi vise:

1) At $i(t)$ oppfyller Kirchoffs andre lov for kretsen (lign. (1) i oppgave-teksten)

2) At $i(t)$ oppfyller initialbetingelsen som må være

$$i(0) = 0 \qquad (1)$$

Ellers vil $|\mathcal{E}_{selvind}| = |L\frac{di}{dt}|$ bli ∞.

Disse to vilkårene bestemmer $i(t)$ éntydig. Har vi derfor en løsning som oppfyller disse er det altså den ene og rette løsning.

Vi viser først at $i(t)$ oppfyller 1):

2²

Vi setter inn $i(t)$ i høyre side av lign. (1) i oppgaveteksten og får:

$$iR + L\frac{di}{dt} = R\frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-t/\tau}) + L\frac{\mathcal{E}}{R}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$\underset{\tau = L/R}{=} \mathcal{E}(1-e^{-t/\tau} + \tau\,\mathcal{E}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}) = \mathcal{E}$$

som er lik venstre side av ligning (1) i oppgaveteksten.

Altså er 1) vist.

For $t=0$ får vi fra ligning (2) i oppgaveteksten:

$$i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1-e^{-0}) = 0$$

og dermed er 2) vist

<u>Altså er strømmen gitt ved ligning (2) i oppgaveteksten q.e.d.</u>

b) Kirchoffs andre lov for dette tilfellet er:

$$iR + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Som har Løsning:

$$i(t) = \text{konstant}\ e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$= \text{konstant}\ e^{-t/\tau} \qquad (2)$$

konstant bestemmes ved:

$i(0) = \mathcal{E}/R$ som gir

konstant $= \mathcal{E}/R$

og dermed:

$$\underline{\underline{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-t/\tau}}} \qquad (3)$$

der $\tau = L/R$

c) Kompleks representasjon av ligu. (3) i oppgaveteksten:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 e^{j\omega t} \qquad (4)$$

Stasjonær løsning er oppgitt å være:

$$i = i_0 e^{j\omega t} \qquad (5)$$

(5) innsatt i (4) gir:

$$L j\omega i_0 e^{j\omega t} + R i_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$(j\omega L + R)\, i_0 = V_0$$

$$\underline{\underline{i_0 = \frac{V_0}{j\omega L + R}}} \qquad (6)$$

d) (6) innsatt i (5) gir:

$$i = \frac{V_0}{j\omega L + R} e^{j\omega t} \qquad (7)$$

som kan omformes til:

$$i = \frac{V_0 (R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\omega t}$$

$$= |i_0| e^{j\varphi} e^{j\omega t} = |i_0| e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad (8)$$

der:

$$|i_0| \equiv \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

$$= \frac{V_0}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \qquad (9)$$

og φ ligger i 4'de kvadrant og er gitt ved at:

$$\tan\varphi \equiv -\frac{\omega L}{R} \qquad (10)$$

På reell form har vi da:

$$i = \mathrm{Re}\{|i_0| e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

$$= |i_0| \cos(\omega t + \varphi) \qquad (11)$$

der $|i_0|$ og φ er gitt ved ligning. (9) og (10).

Oppgave 3

a) $$v_f = \frac{g}{2\pi} T \qquad (1)$$

$v_f = \frac{\lambda}{T}$ i (1) gir:

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{g}{2\pi} T \qquad (2)$$

og:

$$\underline{\underline{\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2}} \qquad (3)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ og $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ i (3)

gir:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{g}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2$$

og:

$$\omega^2 = g k$$

eller

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{gk}}} \qquad (4)$$

b) $$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = \left.\frac{1}{2}\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}\right|_{k=k_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} \qquad (5)$$

$$v_f = \left.\frac{\lambda}{T}\right|_{k=k_0} = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{k=k_0} = \left.\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}\right|_{k=k_0} = \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} \qquad (6)$$

(5) og (6) gir:

$$\underline{\underline{v_g = \tfrac{1}{2} v_f}} \quad \text{for alle verdier} \tag{7}$$

av k_0 og derfor for enhver cosinus-bølge eller fourierkomponent, q.e.d.

c) Bølgene som oppstår i bakkant og dør i framkant beveger seg med fasehastigheten v_f. Bølgetoget beveger seg med gruppehastighet $v_g = \frac{1}{2} v_f$. Dvs at relativhastighet $v_{rel} = \frac{1}{2} v_f$. Dermed (med $T_0 = \frac{\lambda_0}{v_f}$):

$$\Delta t = \frac{6\lambda_0}{\frac{1}{2} v_f} = \frac{12\lambda_0}{\lambda_0/T_0} = 12\,T_0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (3)}}{=} 12\sqrt{\frac{2\pi}{g}\lambda_0} = 6{,}79\,s \approx \underline{\underline{6{,}8\ s}} \tag{8}$$

d) Ligning (4) i oppgaveteksten gir innsatt i venstre side i ligning (3) i oppgaveteksten:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \qquad (9)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(k A_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\right) = -k^2 A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Tilsvarende for høyre side:

$$\frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \qquad (10)$$

$$= \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) = -\omega^2 \frac{\mu}{F_T} A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

(9) er lik (10) dersom $k^2 = \omega^2 \frac{\mu}{F_T}$, dvs.

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{0.010}}\ \mathrm{m/s} = 50\ \mathrm{m/s} \qquad (11)$$

Bølgefunksjonene $D(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$ oppfyller altså bølgeligningen i oppgaveteksten for alle A_0 og φ og alle ω og k som oppfyller lign. (11) q.e.d.

c) Når bølgeligningen (3) i oppgaveteksten er oppfylt har vi iflg. lign (11):

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \text{konstant} \qquad (12)$$

Dette betyr at vi ikke har dispersjon og at alle cosinusbølger forplanter seg med samme hastighet. Et bølgetog (som alltid kan sammensettes ved sum eller integral av cosinusbølger i følge Fourieranalyse) vil derfor ikke forandre form når det forplanter seg bortover strengen uansett hvordan det ser ut.

Det vil i samsvar med dette <u>ikke</u> se ut som det oppstår bølger i bakkant og dør bølger i forkant av et bølgetog som forplanter seg på en streng.

Oppgave 4

a) Totalt felt E_θ i et punkt P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2$$
$$= E_0\{\cos[kr - \omega t - \varphi] + \cos[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]\} \quad (1)$$

Oppgitt: $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ (2)

(2) i (1) med $a = k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi$ og $b = kr - \omega t - \varphi$ gir:

$$E_\theta = 2E_0\cos\left[k\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi\right]\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right) \quad (3)$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d\sin\theta \quad (4)$$

(4) inn i (3) gir

$$E_\theta = 2E_0\cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)\cos\left[k\left(r+\frac{d\sin\theta}{2}\right) - \omega t - \varphi\right] \quad (5)$$

Q.E.D.

Vi ser at totalfeltet er symmetrisk omkring normalen til midtstopperen i spalteskjermen.

b) For et gitt punkt P på observasjonsskjermen kan totalfeltet E_θ i (5) skrives

$$E_\theta = E_{\theta_0}\cos(\omega t + \varphi_1) \quad (6)$$

med amplituden

$$E_{\theta_0} = 2E_0\cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) \quad (7)$$

og

$$\varphi_1 = k(r + \frac{\Delta r}{2}) - \varphi = \text{konstant for gitt } P \qquad (8)$$

Intensiteten til en harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum med amplitude E_{θ_0} er da i følge det oppgitt i oppgaveteksten:

$$I_\theta = \epsilon_0 c \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\theta_0}^2$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 c \left(2E_0 \cos\frac{kd\sin\theta}{2}\right)^2 = \underline{\underline{2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\frac{kd\sin\theta}{2}}} \qquad (9)$$

q.e.d.

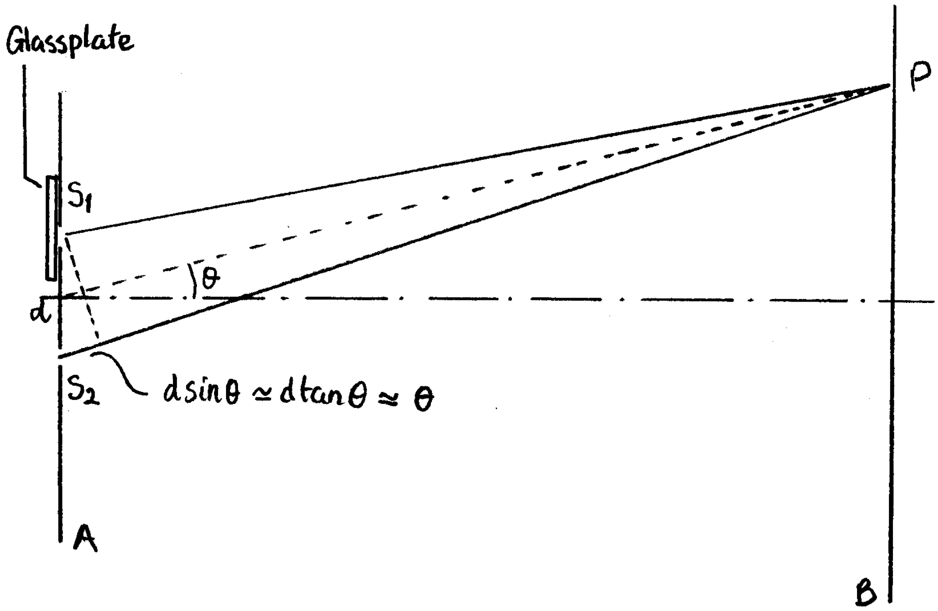
Vi får maksimum lysintensitet når:

$$\frac{kd\sin\theta}{2} = m\pi \ , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad (10)$$

eller

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} \ , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (11)$$

der $|m| \leq d/\lambda$

c) 

Det lyset som går gjennom glassplaten og S_1 vil bli forsinket sammenlignet med lyset som går gjennom S_2. Kalles tykkelsen av glassplaten b blir faseforskjellen Φ:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda/n_g}\cdot b - \frac{2\pi}{\lambda/n_m}\cdot b = (n_g - n_m)\frac{2\pi}{\lambda} b \qquad (12)$$

hvor n_g er glassets brytnings indeks og n_m er brytnings indeksen til mediet som omgir oppsettet.

Veglengde forskjellen i mediet (svarende til Φ) blir:

$$f = \Phi / \frac{2\pi}{(\lambda/n_m)} \overset{(12)}{=} \frac{(n_g - n_m)\frac{2\pi}{\lambda} b}{2\pi/\left(\frac{\lambda}{n_m}\right)} = \frac{n_g - n_m}{n_m} b \qquad (13)$$

Interferenskriteriet for små vinkler θ blir:

$$d\theta - f = d\theta - \frac{(n_g - n_m)}{n_m} b = k\frac{\lambda}{n_m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad (14)$$

I luft har vi $n_m = n_l$. Uten glassplate, dvs $n_g = n_l$, blir interferenskriteriet for øvre første-ordens maksimum:

$$d\,\theta_{1,l} = \frac{\lambda}{n_l} + \underbrace{\frac{(n_l - n_l)}{n_l}b}_{=0} = \frac{\lambda}{n_l} \qquad (15)$$

Som gir posisjonen $y_{1,l}$ for øvre første ordens maks.

$$y_{1,l} = L\theta_{1,l} = \frac{\lambda L}{n_l d} \underset{n_l = 1}{=} \frac{\lambda L}{d} \qquad (16)$$

$$= \frac{5.00 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \cdot 5.00 \cdot 10^{-1}}{5.00 \cdot 10^{-5}}\,m = \underline{5{,}00 \cdot 10^{-3}\,m = 5{,}00\,mm}$$

Med glassplata gir interferenskriteriet (14) for nullte-ordens maksimum ;

$$d\,\theta_{0,lg} - (n_g - 1)\,b = 0 \qquad (17)$$

dvs

$$y_{0,lg} = \theta_{0,lg} \cdot L = (n_g - 1)\frac{bL}{d} \qquad (18)$$

Krever vi at $y_{1,l} = y_{0,lg}$ følger fra (16) og (18) at

$$\lambda \frac{L}{d} = (n_g - 1)\frac{bL}{d} \Rightarrow b = \frac{\lambda}{n_g - 1} \qquad (19)$$

Dersom $n_g = 1{,}98$, og $\lambda = 5{,}00 \cdot 10^2\,nm$ må glasset ha tykkelse :

$$b = \frac{5{,}00 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9}}{1.98 - 1.00} \cong \underline{\underline{5{,}10 \cdot 10^2\,nm}} \qquad (20)$$

d) Det observeres at 0'te ordens maksimum flyttes halv-veis tilbake til opprinnelig posisjon når oppsettet senkes ned i den ukjente væska, dvs. nå gir interferens kriteriet (14) for 0'te orden:

$$d\,\theta_{0,vg} - \frac{(n_g - n_v)}{n_v}\, b = 0$$

$$\Rightarrow y_{0,vg} = L\theta_{0,vg} = \frac{(n_g - n_v)}{n_v}\frac{Lb}{d} \qquad (21)$$

Vi krever at $y_{0,vg} = \frac{1}{2} y_{1,l} \overset{(16)}{=} \frac{1}{2}\frac{\lambda L}{d}$ som vha (21) gir at

$$\underline{n_v} = \frac{n_g b}{b + \frac{1}{2}\lambda} = \frac{1{,}98 \cdot 5{,}10 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9}}{(5{,}10 + \frac{1}{2} 5{,}00) 10^2 \cdot 10^{-9}} \underline{\cong 1.33} \qquad (22)$$

Fra (14) følger nå at avstanden mellom to nabo-interferensmaksima er

$$\Delta y_{nabo} = \Delta\theta_{nabo} \cdot L = \frac{\lambda}{d\, n_v} L$$

$$= \frac{5{,}00 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-1}}{5{,}00 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}33} = \underline{\underline{3{,}76 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 3.76\,\text{mm}}}$$