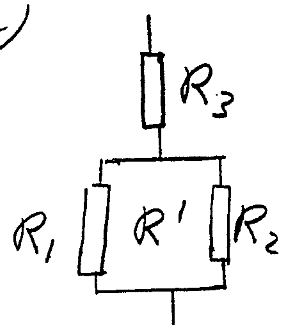
Forslag til løsning.

Oppgave 1

a)



Parallellkopling av ~~motstandene~~ R_1 og R_2 gir motstanden R' bestemt ved

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{5}{4R_1} = \frac{9}{4R_1}$$

$$R' = \frac{4}{9} R_1$$

Seriekopling av motstandene R' og R_3 gir så

$$R = R' + R_3 = \frac{4}{9} R_1 + \frac{1}{3} R_1 = \underline{\underline{\frac{7}{9} R_1}}$$

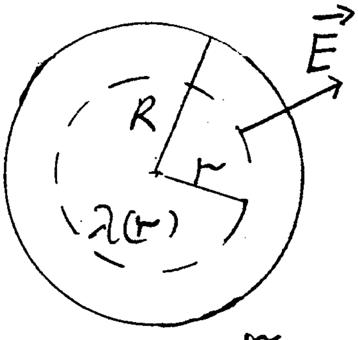
Tverrsnittet til røret er

$$A = \frac{1}{4}\pi\left(d_y^2 - d_i^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(1{,}5^2 - 1{,}2^2\right)\text{cm}^2 = \underline{0{,}636\,\text{cm}^2}$$

Motstanden til røret blir:

$$R = \rho\frac{L}{A} = 2{,}0\cdot 10^{-7}\,\Omega\text{m}\cdot\frac{12\,\text{m}}{0{,}636\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}8\cdot 10^{-2}\,\Omega}}$$

b)



Ladning pr. lengdeenhet innenfor radien r er gitt ved $(r<R)$

$$\lambda(r) = \int \rho(r)\, dA = \int_0^r \rho(r)\cdot 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{2\lambda_0}{\pi R^2} 2\pi \int_0^r \left(1 - \left(\frac{r'}{R}\right)^2\right) r'\, dr' = \frac{4\lambda_0}{R^2}\left(\frac{1}{2}r'^2 - \frac{1}{4}\frac{r'^4}{R^2}\right)\Bigg|_0^r = \underline{\underline{\lambda_0\left[2\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]}}$$

I Gauss lov går integralet over en lukket flate der q_i er ladningen innenfor. Her velger vi til Gaussflate en sylinder med radius r og lengde L. P.g.a. symmetrien er $\vec{E}$ rettet radielt utover og har konstant tallverdi for gitt r. Følgelig gir Gauss lov

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 2\pi r L = q_i/\varepsilon_0 = \lambda(r) L/\varepsilon_0$$

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(2\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right) & \text{for } r<R \\ \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{for } r>R \end{cases}$$

$(\lambda(r) = \lambda_0$ for $r>R)$

c/ Komponentene til det elektriske feltet blir

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\varphi = \underline{\underline{\left(-A + \frac{B}{r^2}\right)\cos\varphi}}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\varphi = \underline{\underline{-\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\sin\varphi}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \underline{\underline{0}}$$

Siden overflaten er ledende vil ikke $\vec{E}$ ha noen komponent langs denne ved statiske forhold. Følgelig er det elektriske feltet rettet vinkelrett denne (for r = R), dvs. $E_\varphi = 0$ evt. $V(r)$ = konst. langs overflate.

Betingelsen på overflaten innebærer (r = R)

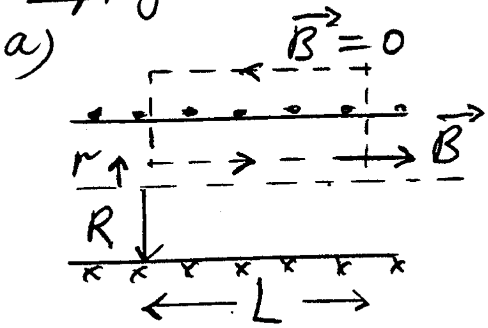
$$0 = E_\varphi = -\left(A + \frac{B}{R^2}\right)\sin\varphi$$

eller

$$\underline{\underline{B = -AR^2}}$$

Oppgave 2.

a)



Med integrasjonskurve som angitt på figuren finner en

$$\oint \vec B \, d\vec l = BL$$

For $r < R$ er strømmen innenfor integrasjonskurven $I_i = nLI$. Med Ampères lov finner vi følgelig

$$BL = \mu_0 I_i = \mu_0 n L I$$

$$\underline{\underline{B = \mu_0 n I}}$$

Den magnetiske fluksen gjennom én vikling er BA. Total fluks er følgelig

$$\Phi = NBA$$

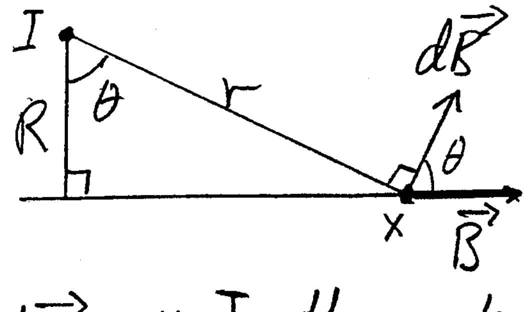
Innsatt for B med $n = N/L$ gir dette

$$\Phi = N \mu_0 n I A = (\mu_0 N^2 A / L) I = L I$$

Så selvinduktansen blir

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \frac{500^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} m^2}{0{,}20 m} = \underline{\underline{0{,}47 \, mH}}$$

b)



Bidraget til magnetfeltet fra strømelement $d\vec B$ er gitt ved

$$d\vec B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \quad \text{der } r^2 = R^2 + x^2$$

siden $d\vec l \perp \hat r$ og dermed $|d\vec l \times \hat r| = dl$.

P.g.a. symmetrien vil resulterende magnetfelt peke langs x-aksen. Dekomponering langs x-aksen gir så

$$dB_x = \cos\theta \, dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl$$

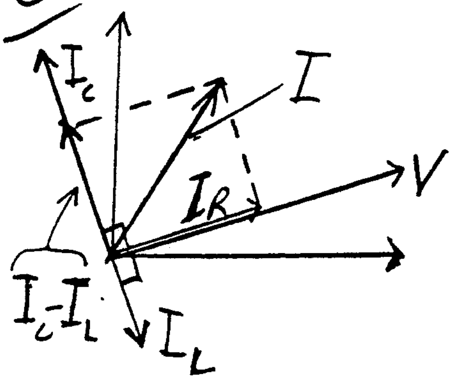
da $\cos\theta = R/r$. Ved integrering rundt sirkelen er r konstant. Resulterende magnetfelt for én vinding blir følgelig

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} 2\pi R = \underline{\frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3}}$$

Med N vindinger får en dermed

$$B = NB_x = \underline{\underline{\frac{KI}{r^3}}} \quad \text{der } K = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} N \mu_0 R^2}} \qquad (r^2 = R^2 + x^2)$$

c



Strømmen gjennom motstanden er $I_R = \frac{1}{R} V$, gjennom kapasitansen $I_C = \omega C V$, og gjennom induktansen $I_L = \frac{1}{\omega L} V$. Strømmen I_c er fase-forskjøvet 90° foran spenningen mens I_L ligger 90° etter. Fra viserdiagrammet finner en følgelig

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_c - I_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \, V$$

$$F = I/V = \underline{\underline{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}}$$

[<u>Alternativt med komplekse tall</u>: Parallellkopling

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$F = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} \Rightarrow F = \frac{1}{|Z|} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.]$$

Oppgave 3

a) Endring i frekvens skyldes dopplereffekten. Når bilen står i ro vil sirenelyden ha frekvensen f_0. Med hastighet v på bilen har en da sammenhengene

$$f_m = f_0 \frac{c}{c-v} \quad \text{og} \quad f_e = f_0 \frac{c}{c+v}$$

som gir forholdet

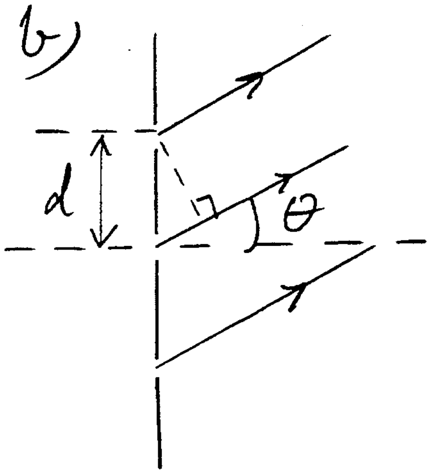
$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{c-v}{c+v} = \frac{27}{32}$$

eller $32(c-v) = 27(c+v)$

$$5c = 59v$$

$$v = \frac{5}{59} c = \frac{5}{59} \cdot 350\ \text{m/s} = 29{,}7\ \text{m/s} = 107\ \text{km/t}.$$

b)



Veiforskjellen mellom 2 naboespalter er $\Delta L = d \sin\theta$

Bølgelengden er $\lambda = c/f$ $(f\lambda = c)$.

Fasevinkelen blir dermed

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \underline{\underline{2\pi \frac{f d \sin\theta}{c}}}.$$

Resulterende utsving ved interferens

$$y = A[\cos(\omega t - \delta) + 2\cos\omega t + \cos(\omega t + \delta)] =$$

$$A(\cos\omega t \cos\delta + \sin\omega t \sin\delta + 2\cos\omega t + \cos\omega t \cos\delta - \sin\omega t \sin\delta)$$

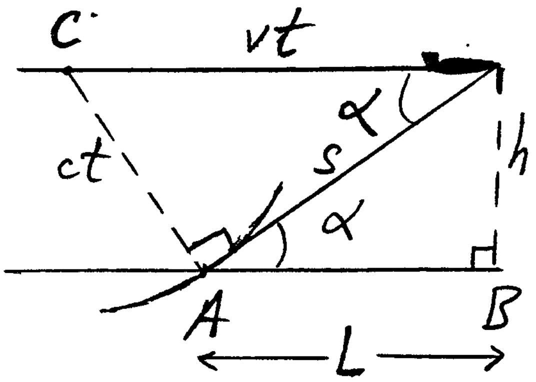
$$= \underline{2A(1+\cos\delta)\cos\omega t}$$

(6)

Intensiteten blir $I = \text{konst} \langle y^2 \rangle_{av} = \text{konst.} A^2$
$\times (1+\cos\delta)^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle_{av} = \text{konst}(1+\cos\delta)^2 = \underline{\underline{I_0 \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^2}} = \underline{\underline{I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}}}$

(Tidsmiddel $\langle \cos^2 \omega t \rangle_{av} = \frac{1}{2} = \text{konst}$, $I = I_0$ for $\delta = 0$.)

c/



Sjokkbølgen som treffer stedet A starter mens flyet er på stedet C. Mens lyden har tilbakelagt avstanden CA av lengde ct har flyet fløyet lengden vt.

Fra geometrien på figuren finner en dermed

$$ct = vt \sin\alpha$$

eller $\sin\alpha = \frac{c}{v} = \frac{330 \, m/s}{1800 \, km/h \left(\frac{1}{3600 \, s/h}\right)} = \frac{330}{500} = \underline{0{,}66}.$

$(\alpha = 41{,}3^\circ)$

Med $h = L \, tg\, \alpha$ blir avstanden L

$$L = \frac{h}{tg\,\alpha} = \frac{11000 \, m}{tg\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot 11000 \, m =$$

$$\frac{\sqrt{1-0{,}66^2}}{0{,}66} \cdot 11000 \, m = \underline{\underline{12{,}5 \, km}}$$