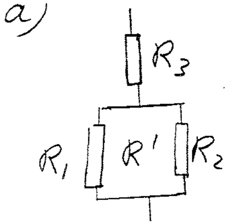
Kontinuasjonseksamen i fag ①
SIF 4008 Fysikk, 15/8 - 03

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a)



Parallellkopling av motstandene R_1 og R_2 gir motstanden R' bestemt ved

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{5}{4R_1} = \frac{9}{4R_1}$$

$$R' = \frac{4}{9}R_1$$

Seriekopling av motstandene R' og R_3 gir oss

$$R = R' + R_3 = \frac{4}{9}R_1 + \frac{1}{3}R_1 = \underline{\underline{\frac{7}{9}R_1}}$$

Tverrsnittet til røret er

$$A = \frac{1}{4}\pi(d_y^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4}(1{,}5^2 - 1{,}2^2)\,\text{cm}^2 = \underline{0{,}636\,\text{cm}^2}$$

Motstanden til røret blir:

$$R = \rho\frac{L}{A} = 2{,}0\cdot10^{-7}\,\Omega\text{m}\cdot\frac{12\,\text{m}}{0{,}636\cdot10^{-4}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}8\cdot10^{-2}\,\Omega}}$$

b) Det elektriske potensialet finnes ved integrering

$$V(z) = -\int\vec{E}\,d\vec{r} = -\int_0^z E\,dz' = \int_0^z\left(k_1 e^{-z/z_1} + k_2 e^{-z/z_2}\right)dz_2$$

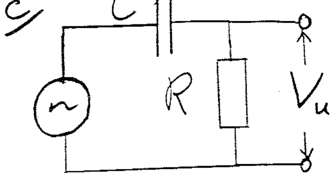
$$= \Big[-k_1 z_1 e^{-z/z_1} - k_2 z_2 e^{-z/z_2}\Big]_0^z = \underline{\underline{k_1 z_1\left(1-e^{-z/z_1}\right) + k_2 z_2\left(1-e^{-z/z_2}\right)}}$$

I Gauss lov går integralet over en lukket flate der q_i er ladningen innenfor. Her velger vi til Gaussflate er kule med radius R (dvs. $z=0$). Det elektriske feltet er konstant langs jordoverflaten og rettet radielt utover. Følgelig gir Gauss lov

$$\oint\vec{E}\,d\vec{A} = E\cdot4\pi R^2 = \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_j}{\varepsilon_0}$$

$$Q_j = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E = 4\pi\varepsilon_0 R^2[-(k_1+k_2)] = -4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\text{C/Vm}$$
$$\times(6{,}4\cdot10^6\,\text{m})^2\cdot130\,\text{V/m} = \underline{\underline{-5{,}9\cdot10^5\,\text{C}}} \qquad (z=0)$$

c)



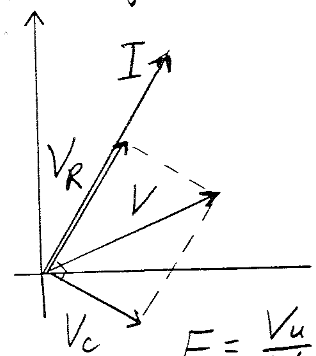
Spenningen over motstanden er

$$V_R = V_u = RI$$

mens den over kapasitansen er

$$V_C = \frac{1}{\omega C}I$$

der strømmen er faseforskjøvet 90° foran spenningen V_c.



Med viserdiagram finner en: Spenningen inn blir

$$V_i = V = \sqrt{V_R^2 + V_c^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}\,I$$

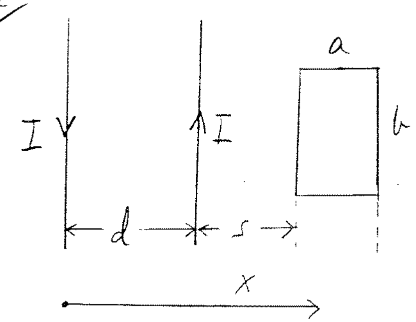
Med $V_u = V_R = RI$ finner en følgelig forholdet

$$F = \frac{V_u}{V_i} = \frac{RI}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I} = \underline{\underline{\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}}$$

[Alternativt med komplekse tall: Impedans seriekopling $Z = R + 1/i\omega C$. Med $V_i = ZI$ og $V_R = RI$ blir da $V_u/V_i = R/Z$ slik at $F = |V_u/V_i| = R/|\mathbf{Z}| = R/\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.]

Oppgave 2.

a)



Potensialforskjellen mellom de 2 lederne vil være

$$\Delta V = V(d-R) - V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-R}{R} - \ln\frac{d}{d-R}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)}} \quad \left(\approx \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{R}\right)}}\right)$$

Ladning på stykke av lengde l

$$Q = \lambda l$$

Kapasitansen blir følgelig $(d >> R)$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)} \approx \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(d/R)}}}$$

b) Magnetfeltet mellom lederne (rettet opp av papirplanet og vinkelrett dette) finnes ved å addere feltene fra hver av lederne. Med det gitte uttrykket har en da

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Magnetisk fluks gjennom sløyfe av lengde l blir følgelig

$$\phi_m = \int \vec{B}\,d\vec{A} = l\int_R^{d-R} B\,dx = l\,\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$

$$= \frac{l\mu_0 I}{2\pi}\Big|_R^{d-R}\left[\ln x - \ln(d-x)\right] = \frac{l\mu_0 I}{2\pi}\,2\left(\ln(d-R) - \ln R\right)$$

$$= \underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-R}{R}} \approx \underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln(d/R)}$$

Selvinduktansen av sløyfen (ledningsstykket) blir følgelig

$$L = \frac{\phi_m}{I} \approx \underline{\underline{\frac{l\mu_0}{\pi}\ln(d/R)}}$$

[Merk at $(L/l)(C/l) = \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ der c er lyshastigheten. c er da også forplantningshastigheten til elektriske signaler (bølger) langs ledningsparet.]

c) Magnetfeltet i den rektangulære strømsløyfen blir som funnet under punkt b) men med $d+s<x<d+s+a$. Med sløyfe av lengde b blir nå fluksen gjennom denne

$$\phi_m = \int \vec{B}\,d\vec{A} = b\int_{d+s}^{d+s+a} B\,dx = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\Big|_{d+s}^{d+s+a}\left[\ln x - \ln(d-x)\right]$$

$$= \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d+s+a}{d+s}\right) - \ln\frac{s+a}{s}\right] = \underline{\frac{b\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}$$

Har så

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin\omega t$$

Indusert elektromotorisk kraft blir dermed

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \underline{\underline{\frac{b\mu_0\omega I_0}{2\pi}\sin\omega t\,\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}}$$

Oppgave 3

a) Endring i frekvens skyldes dopplereffekten. Når bilen står i ro vil sirenelyden ha frekvensen f_0. Med hastighet v på bilen har en da sammenhengene

$$f_m = f_0 \frac{c}{c-v} \quad \text{og} \quad f_e = f_0 \frac{c}{c+v}$$

som gir forholdet

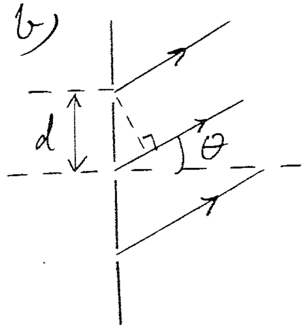
$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{c-v}{c+v} = \frac{27}{32}$$

eller

$$32(c-v) = 27(c+v)$$
$$5c = 59v$$

$$v = \frac{5}{59} c = \frac{5}{59} \cdot 350 \text{ m/s} = 29{,}7 \text{ m/s} = 107 \text{ km/t.}$$

b)



Veiforskjellen mellom 2 naboespalter er $\Delta L = d \sin\theta$

Bølgelengden er $\lambda = c/f$ $(f\lambda = c)$.

Fasevinkelen blir dermed

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \underline{\underline{2\pi \frac{f d \sin\theta}{c}}}.$$

Resulterende utsving ved interferens

$$y = A[\cos(\omega t - \delta) + 2\cos\omega t + \cos(\omega t + \delta)] =$$
$$A(\cos\omega t \cos\delta + \sin\omega t \sin\delta + 2\cos\omega t + \cos\omega t \cos\delta - \sin\omega t \sin\delta)$$
$$= \underline{2A(1+\cos\delta)\cos\omega t}$$

Intensiteten blir $I = \text{konst}\langle y^2\rangle_{av} = \text{konst}\cdot A^2$

$$\times (1+\cos\delta)^2 \langle\cos^2\omega t\rangle_{av} = \text{konst}(1+\cos\delta)^2 = \underline{\underline{I_0\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^2}} = \underline{\underline{I_0 \cos^2\frac{\delta}{2}}}$$

(Tidsmiddel $\langle\cos^2\omega t\rangle_{av} = \frac{1}{2} = \text{konst}$, $I = I_0$ for $\delta = 0$.)

c) Med Snells brytningslov er vinkelen θ_1 bestemt ved ($n_1 = 1$ for luft, $n_2 = n$, $\theta_2 = 90° - \alpha = 30°$)

$$\sin\theta_1 = n \sin 30° = \frac{n}{2}$$

$$\theta_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{n}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1{,}58}{2}\right) = \text{Arcsin}(0{,}79)$$

$$\theta_1 = \underline{52{,}2°}$$

Avbøyningen av strålen ved brytning i den 1. flaten er dermed $\psi = \theta_1 - 30° = 22{,}2°$. Brytningen i den andre flaten er symmetrisk med den første slik at total avbøyning blir

$$\phi = 2\psi = \underline{\underline{44{,}4°}}$$