Eksamen i fag SIF4012 Fysikk 31/5-01

Forslag til løsning

Oppgave 1

(1)

a) Sammenhengen mellom overflateladning σ og elektrisk felt $\vec{E}$ blir som i oppgave 1 slik at

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

Nå er videre $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der V er spenningen mellom platene slik at en finner

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

og kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}}$$

Med konstant relativ permittivitet ε_r blir kapasitansen

$$C = \varepsilon_r C_0 = \underline{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

Numerisk

$$C = 5{,}6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \frac{1{,}2 \cdot 10^{-2} m^2}{3 \cdot 10^{-3} m} = 198 \cdot 10^{-12} \, As/V \approx \underline{\underline{200 \, pF}}$$

b) Med dielektrisk medium vil overflateladning $\sigma = \varepsilon_0 E$ erstattes med

$$D = \sigma = Q/A$$

Dette er også verdien til D mellom platene, dvs

$$D_z = D = D(z) = \underline{\underline{Q/A}} \quad (= \text{konst})$$

da det ikke finnes fri romladning mellom platene.

Det elektriske feltet følger nå fra $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$

$$E_z = E = E(z) = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} D = \underline{\underline{\frac{1}{a+bz} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}} \qquad \left(\sigma = \frac{Q}{A}\right)$$

(2)

Polariseringen blir følgelig

$$P_z = P = P(z) = D - \varepsilon_0 E = \underline{\underline{\sigma\left(1 - \frac{1}{a+bz}\right)}}$$

Potensialforskjellen (spenningen) mellom platene finnes nå ved å integrere det elektriske feltet

$$V = -\int \vec{E}\, d\vec{s} = -\int_d^0 E_z \, dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{dz}{a+bz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left| \frac{1}{b} \ln(a+bz) \right|_0^d$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{b} \left(\ln(a+bd) - \ln a \right) = \underline{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} d\right)}$$

Kapasitansen blir

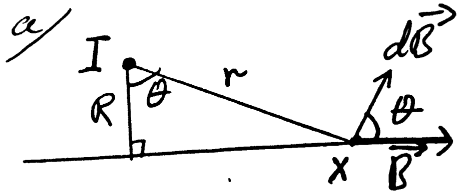
$$C_V = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 b} \ln\left(1 + \frac{b}{a} d\right)} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{b A}{\ln\left(1 + \frac{b}{a} d\right)}}}$$

Fri romladningstetthet er gitt ved $\rho = \nabla \vec{D}$ og samlet (netto) er gitt ved $\rho_s = \varepsilon_0 \nabla \vec{E}$. Følgelig er bunden romladningstetthet gitt ved

$$\rho_b = \rho_b(z) = \rho_0 - \rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E} - \nabla \vec{D} = -\nabla \vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \underline{\underline{-\sigma \frac{b}{(a+bz)^2}}}$$

Oppgave 2

a/



Bidraget til magnetfeltet fra strømelement $\vec{dB}$ er gitt ved

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2} \qquad \text{der } r^2 = R^2 + x^2$$

Siden $\vec{dl} \perp \hat{r}$ og følgelig $|\vec{dl} \times \hat{r}| = dl$. Resulterende magnetfelt vil peke langs x-aksen p.g.a symmetrien. Dekomponering langs x-aksen gir så

$$dB_x = \cos\theta \, dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\,dl$$

da $\cos\theta = \frac{R}{r}$. Ved integrering rundt sirkelen er r konstant. Resulterende magnetfelt for én vinding blir følgelig

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{r^3}2\pi R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3}$$

Med N vindinger får en dermed

$$B = NB_x = \underline{\underline{\frac{K\,I}{r^3}}} \quad \text{der } K = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}N\mu_0 R^2}}$$

$(\sigma = 3,\ r^2 = R^2 + x^2)$

b/ Gjensidig induksjon er bestemt av

$$\Phi_2 = M I_1$$

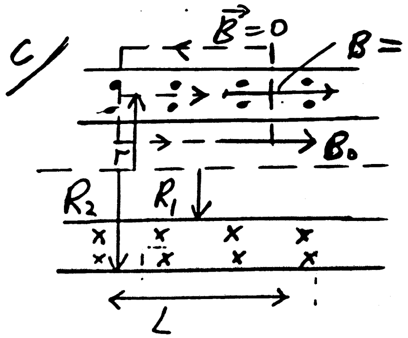
der I_1 kan være strømmen i den store spolen mens Φ_2 er den magnetiske fluksen gjennom den andre spolen fra den første. Med areal $A = \pi R_2^2$, N_2 vindinger og magnetfelt som antas konstant over den lille spolen $(R_2 << R)$ blir denne

$$\Phi_2 = N_2 A B = N_2 A \frac{K}{r^3} I = M I_1$$

Med $I = I_1$ finner en følgelig

$$\underline{\underline{M = N_2 A \frac{K}{r^3}}} \quad \text{der } A = \pi R_2^2 \text{ og } K = \tfrac{1}{2}N\mu_0 R^2$$

c/



Med integrasjonskurve som på figuren finner en

$$\oint \vec{H}\,\vec{dl} = HL$$

For $r < R_1$ er strømmen innenfor integrasjonskurven $I_{in} = nLI$. For stasjonære forhold blir Ampères lov $\oint \vec{H}\,\vec{dl} = I$ og vi finner

$$HL = I_{in} = nLI \text{ eller } H = nI$$

og følgelig med $\mu_r = 1$

$$B = \mu_0 H = \underline{\mu_0 n I}$$

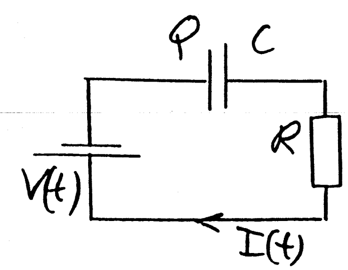
Med $R_1 < r < R_2$ blir det færre viklinger innenfor integrasjonsvegen. Mellom radiene R_1 og R_2 er det $N = nL$ viklinger på lengde L slik at mellom radien r og R_2 blir antall viklinger

$$N_r = N\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} = nL\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}$$

Tettheten av viklinger blir $n_r = N_r/L$. I samsvar med beregningen for $r < R_1$ blir dermed magnetfeltet,

$$B = B(r) = \mu_0 n_r I = \underline{\underline{\mu_0 n \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} I}}$$

Oppgave 3



Spenning over kapasitansen: $V_c = \frac{1}{C} Q$

Spenning over motstanden: $V_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$

Differensiallikningen for Q blir

$$V_R + V_c = V(t)$$

$$\underline{R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 e^{-\sigma t}}$$

Med $Q = Ke^{-\alpha t} + Ae^{-\sigma t}$ finner en

$$\dot{Q} = -\alpha K e^{-\alpha t} - \sigma A e^{-\sigma t}$$

som ved innsetting gir

$$\left(-R\alpha K + \frac{1}{C}K\right)e^{-\alpha t} + \left(-R\sigma A + \frac{1}{C}A\right)e^{-\sigma t} = V_0 e^{-\sigma t}$$

Da likningen gjelder for vilkårlig tid t må en ha

$$-R\alpha K + \frac{1}{C}K = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{RC}}}$$

$$\left(-R\sigma + \frac{1}{C}\right)A = V_0$$

$$A = \underline{\underline{\frac{V_0 C}{1 - RC\sigma}}} = \frac{VC}{1 - \sigma/\alpha}$$

Størrelsen K bestemmes av begynnelsesverdien

$$0 = Q(0) = K + A$$

$$K = \underline{\underline{-A}} = \frac{VC}{1 - RC\sigma}$$