LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN SIF4014 BØLGEFYSIKK/FYSIKK3 OG MNFFY101 GENERELL FYSIKK II 6/12 – 2002

Oppgave 1

a) Frekvensen f_m togføreren på det ene toget vil måle for fløytelyden fra det andre vil i henhold til ligning (17) i formelsamlingen være:

$$f_m = \frac{1 - V_m/c}{1 - V_s/c} f_s = \frac{1 - (-30{,}0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})}{1 - (30{,}0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})} \cdot 4{,}40 \cdot 10^2\,\text{Hz}$$

$$= \underline{\underline{5{,}27 \cdot 10^2\,\text{Hz}}}$$

b) Toget som kjører i medvind (tog A) vil ha hastighet i forhold til luften:

$$V = (30{,}0 - 10{,}0)\,\text{m/s} = 20{,}0\,\text{m/s}$$

Tilsvarende vil toget som kjører i motvind (tog B) ha hastighet i forhold til luften:

$$V = (30{,}0 + 10{,}0)\,\text{m/s} = 40{,}0\,\text{m/s}$$

Togføreren i tog A vil da (i henhold til ligning (17) i formelsamlingen) måle en frekvens fra fløyten i tog B:

$$f_A = \frac{1 - V_m/c}{1 - V_s/c} f_s = \frac{1 - (-20{,}0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})}{1 - (40{,}0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})} \cdot 4{,}40 \cdot 10^2\,\text{Hz}$$

$$= \underline{\underline{5{,}30 \cdot 10^2\,\text{Hz}}}$$

Togføreren i tog B vil måle en frekvens fra fløyten i tog A:

$$f_B = \frac{1 - V_m/c}{1 - V_s/c} f_s = \frac{1 - (-40{,}0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})}{1 - (20.0\,\text{m/s}/333\,\text{m/s})} \cdot 4.40 \cdot 10^2\,\text{Hz}$$

$$\underline{\underline{= 5{,}24 \cdot 10^2\,\text{Hz}}}$$

Oppgave 2

a) Det reflekterte lyset vil være lineærpolarisert i retning normalt innfallsplanet dersom innfallsvinkelen på vannflaten er lik Brewstervinkelen. Fra lign. (52) i formelsamlingen følger:

$$\tan \theta_{iB} = n_{vann} = 1.33 \Rightarrow \theta_{iB} = 53.1°$$

θ_{iB} er innfallsvinkelen og vinkelen det betraktede lyset danner med vannflaten blir da:

$$90° - 53.1° = \underline{\underline{36.9°}}$$

For å få slukket ut alt lys må polarisatoren holdes slik at <u>retningen som slipper gjennom $\vec{E}$-feltet er i innfallsplanet</u>. Den bør forøvrig holdes normalt stråleretningen for lyset som betraktes.

b) For å slukke ut lyset reflektert fra overgangen luft/olje er det nødvendig å betrakte det under noe mindre vinkel med vannflaten enn hva tilfellet var for overgangen luft/vann, hvilket gir oss følgende relasjon for Brewstervinkelen i de to tilfellene:

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{iB}^{olje} < \frac{\pi}{2} - \theta_{iB}^{vann}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_{iB}^{olje} > \theta_{iB}^{vann} \qquad (1)$$

Ved hjelp av lign (52) i formelsamlingen, kan relasjonen for Brewstervinklene (1) omformes til en relasjon mellom brytningsindeksene for olje og vann, n_{olje} og n_{vann}:

$$\arctan(n_{olje}) > \arctan(n_{vann}) \qquad (2)$$

Det følger av (2) (da arctan-funksjonen er en monotont stigende funksjon) at:

$$\underline{\underline{n_{olje} > n_{vann}}} \qquad (3)$$

c) Fasehastigheten $v_f = \frac{\omega}{k}$ finnes ved hjelp av dispersjonsrelasjonen (1):

$$v_f = \frac{\omega}{k} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{9{,}82\,\mathrm{m/s^2}}{2\pi/0{,}50\,\mathrm{m}}} = \underline{\underline{0.88\,\mathrm{m/s}}} \qquad (4)$$

Tilsvarende finnes for gruppehastigheten v_g (lign. (10) i formelsamling):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9{,}82\,\mathrm{m/s^2}}{2\pi/0.50\mathrm{m}}} = \underline{\underline{0{,}44\,\mathrm{m/s}}} \qquad (5)$$

d) Fourierkomponenten forplanter seg inn mot stranda med den tilhørende gruppehastighet, $v_g = 0{,}44\,\mathrm{m/s}$, altså tilbakelegger den strekningen 10,0 m på tiden

$$t = 10{,}0\,\mathrm{m}/0{,}44\,\mathrm{m/s} \cong \underline{\underline{23\ \mathrm{s}}}$$

e) Dersom luftens tetthet neglisjeres gir ligning (7) i formelsamlingen for fasehastigheten V_f:

$$V_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}} \qquad (6)$$

med ρ lik vannets tetthet. (6) kan vha relasjonen $V_f = \omega/k$ omformes:

$$\omega = k\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k\gamma}{\rho}} = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \qquad (7)$$

Første ledd under rottegnet i (7) gjenkjennes fra pkt c og d ovenfor som det dominerende bidrag for tyngdebølger på dypt vann. Det andre leddet beskriver grenseflatespenningens betydning for bølgeutbredelsen. For en fourier-komponent med tilhørende bølgelengde 17 mm vil de to leddene bidra omtrent like mye og begge må derfor tas med i den videre regning. Fra (7) finnes gruppehastigheten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\left(g + \frac{3\gamma k^2}{\rho}\right) \Big/ \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \qquad (8)$$

Setter vi inn for g, γ, k og ρ
($g = 9.82$ m/s², $\gamma = 0.070$ N/m, $k = 2\pi/0.017$ m; og $\rho = 1.00$ kg/dm³ $= 1000$ kg/m³) finnes følgende gruppefart for

den aktuelle fourierkomponenten:

$$v_g = \frac{0.5\left(9.82\,\mathrm{m/s^2} + \dfrac{3\cdot 0{,}070\ \mathrm{N/m}\cdot(2\pi/0.017\mathrm{m})^2}{1000\ \mathrm{kg/m^3}}\right)}{\sqrt{9.82\,\mathrm{m/s^2}\,(2\pi/0.017\mathrm{m}) + \dfrac{0{,}070\ \mathrm{N/m}\,(2\pi/0.017\mathrm{m})^3}{1000\ \mathrm{kg/m^3}}}} = 0.227\ \mathrm{m/s} \cong \underline{\underline{0.23\ \mathrm{m/s}}}$$

Fourierkomponenten med tilhørende bølgelengde $\lambda_0 = 17\,\mathrm{mm}$ bruker følgelig tiden

$$t = 1{,}0\,\mathrm{m}/0{,}227\,\mathrm{m/s} \cong \underline{\underline{4{,}4\ \mathrm{s}}}$$

på å nå stranden fra det stedet der den ble generert 1,0 m borte.

f) Kaller vi den romlige lengden av bølgetoget L og tidslengden τ, vil det i et öyeblikksbildet tatt av bølgetoget i det det passerer $x = x_1$ telles

$$n = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{L}{T_0 v_f} = \frac{\tau v_g}{T_0 v_f} \qquad (10)$$

klare bølgetopper.

Fra dispersjons relasjonen $\omega = \sqrt{gk}$ følger at

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}v_f \qquad (11)$$

(11) inn i (10) gir sammen med $\tau = 12T_0$:

$$n = \frac{12T_0}{T_0}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{6}}$$

Dvs. i øyeblikksbildet kan telles 6 klare topper.

g)

Fra dispersjons relasjonen

$$\omega = \sqrt{gD} \cdot k$$

følger at

$$v_g = \sqrt{gD} = \frac{\omega}{k} = v_f$$

og at vi altså ikke har dispersjon. Dette betyr at ~~et~~ øyeblikksbilde vil inneholde like mange topper som vi ser passere punktet $x = x_1$, dvs. 12 klare bølgetopper.

Antall klare bølgetopper i øyeblikksbildet kan også regnes ut på samme måte som i oppg. f:

$$n = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{L}{T_0 v_f} = \frac{\tau v_g}{T_0 v_f} = \frac{12 T_0}{T_0} \cdot 1 = \underline{\underline{12}}$$

Oppgave 3

a) Oppgitt vektorrelasjon $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$ *
anvendt på det elektriske feltet $\vec{E}$, gir vha
Maxwells ligninger på differensialform
(lign. (23) - (26) i formelssamling) :

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) \overset{(25)}{=} -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \overset{(26)\,\vec{j}=0}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0\ (\text{fra } (23)_{\rho=0})}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

Altså:

$$\nabla^2\vec{E} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{med } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) Bølgeligningen (2) i oppg. teksten er en lineær partiell differensiallikning med konstante koeffisienter. Den gjelder for hver av delbølgene og må da også gjelde for summen.

Regning gir at VS = HS :

$$\text{VS:}\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_0\vec{e}_y\cos(kx-\omega t) + E_0\vec{e}_z\cos(kx-\omega t+\varphi)\right)$$

$$= -k^2E_0\vec{e}_y\cos(kx-\omega t) - k^2E_0\vec{e}_z\cos(kx-\omega t+\varphi)$$

$$= -k^2\vec{E}$$

---

* Denne vektorrelasjonen var oppgitt feilaktig på eksamensoppgaven. Feilen ble rettet i løpet av eksamen og eksamenstiden ble som kompensasjon forlenget med 1/2 time.

HS: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E_0\vec{e}_y\cos(kx-\omega t)+E_0\vec{e}_z\cos(kx-\omega t+\varphi)\right]$

$$= \frac{1}{c^2}\left[(-\omega)^2(-1)E_0\vec{e}_y\cos(kx-\omega t)+(-\omega)^2(-1)E_0\vec{e}_z\cos(\omega t-kx+\varphi)\right]$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \underset{\uparrow}{=} -k^2\vec{E} \qquad \text{QED.}$$

$$\frac{\omega}{k}=c=\text{konst}$$

Altså, VS = HS og bølgefunksjonen (3) i oppg. teksten oppfyller bølgeligm. (2) (i oppg. teksten) for alle φ og alle ω og k, som oppfyller $\omega/k = c$.

c) Betingelsen for at $\vec{E}(x.t)$ beskriver en lineærpolarisert bølge er at projeksjonen av feltvektoren $\vec{E}(x.t)$ i yz-planet faller langs en rett linje. Dersom vi kaller vinkelen denne linjen danner med y-aksen for θ, kan vi sette:

$$\tan\theta = \frac{E_z}{E_y} = \frac{E_0\cos(kx-\omega t+\varphi)}{E_0\cos(kx-\omega t)} = \text{konstant.} \qquad (1)$$

(1) gir ved omforming:

$$\cos(kx-\omega t)\cdot\tan\theta = \cos(kx-\omega t+\varphi)$$

$$\cos(kx-\omega t)\cdot\tan\theta = \cos(kx-\omega t)\cos\varphi - \sin(kx-\omega t)\sin\varphi$$

$$\cos(kx-\omega t)\left[\tan\theta-\cos\varphi\right] = -\sin(kx-\omega t)\cdot\sin\varphi \qquad (2)$$

Da $\cos(kx-\omega t)$ og $\sin(kx-\omega t)$ er lineært uavhengige funksjoner vil (2) være oppfylt kun dersom

$$\sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

og

$$\tan\theta - \cos\varphi = 0 \qquad (4)$$

Kravene (3) og (4) gir :

$$\varphi = 0 \quad (\text{med } \theta = \pi/4) \text{ eller } \varphi = \pi \quad (\text{med } \theta = \tfrac{3\pi}{4})$$

Dette resultatet er det mulig å komme fram til på enklere vis ved på fysikalsk grunnlag innse at bølgefunksjonen (3) i oppg. teksten beskriver en lineærpolarisert bølge kun når de to delbølgene svinger i fase ($\varphi = 0$) eller i motfase ($\varphi = \pi$).

Betingelsen for at $\vec{E}(x,t)$ beskriver en sirkulærpolarisert bølge er at endepunktet av feltvektoren $\vec{E}(x,t)$'s projeksjon i YZ-planet faller på en sirkel linje. Dersom vi kaller radius i sirkelen $\mathcal{E}$ kan vi sette :

$$\mathcal{E}^2 = |\vec{E}(x,t)|^2 = E_0^2 \cos^2(kx-\omega t) + E_0^2 \cos^2(kx-\omega t+\varphi) = \text{konstant} \qquad (5)$$

eller

$$\cos^2(kx-\omega t) + \cos^2(kx-\omega t+\varphi) = \mathcal{E}^2/E_0^2 \qquad (6)$$

Vi kan omforme venstre siden i likn. (6) på følgende vis (vi innfører midlertidig $kx-\omega t = A$ for å forenkle skrivearbeidet):

$$\cos^2 A + \cos^2(A+\varphi) = \cos^2 A + [\cos A \cos\varphi - \sin A \sin\varphi]^2$$

$$= \cos^2 A + \cos^2 A \cdot \cos^2\varphi + \sin^2 A \sin^2\varphi - 2\cos A \sin A \cos\varphi \sin\varphi$$

$$= \cos^2 A + \cos^2 A \cos^2\varphi + (1-\cos^2 A)(1-\cos^2\varphi) - 2\cos A \sin A \cos\varphi \sin\varphi$$

$$= \cancel{\cos^2 A} + \cos^2 A \cos^2\varphi + 1 - \cos^2\varphi - \cancel{\cos^2 A} + \cos^2 A \cos^2\varphi - 2\cos A \sin A \cos\varphi \sin\varphi$$

$$= [2\cos^2 A - 1]\cos^2\varphi + 1 - 2\cos A \sin A \cos\varphi \sin\varphi$$

$$= \cos 2A \cdot \cos^2\varphi + 1 - \tfrac{1}{2}\sin 2A \cdot \sin 2\varphi \qquad (7)$$

Ved substitusjon $A = kx - \omega t$ i (7) og innsetting i (6) får vi:

$$\cos 2(kx-\omega t)\cdot\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2(kx-\omega t)\sin 2\varphi = \frac{\mathcal{E}^2}{E_0^2} - 1 \qquad (8)$$

Da $\cos 2(kx-\omega t)$ og $\sin 2(kx-\omega t)$ er lineært uavhengige funksjoner kan likningen kun være oppfylt for alle x og t dersom:

$$\cos^2\varphi = 0 \qquad (9)$$

$$\sin 2\varphi = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{E_0^2} - 1 = 0 \qquad (11)$$

Fra kravene (9)-(11) følger at

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ med } \mathcal{E} = E_0}}$$

På samme vis som ovenfor for det lineærpolariserte tilfellet kunne ovenstående resultat vært innsett på enklere vis (uten regning) ved på fysikalsk grunnlag innse at betingelsen for sirkulærpolarisasjon kun kan være oppfylt dersom de to delbølgene har faseforskjell $+\frac{\pi}{2}$ eller $-\frac{\pi}{2}$ (dvs $\frac{3\pi}{2}$ dersom vi krever at $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Oppgave 4

Romskipet A har under hele tankeeksperimentet jevn og rettlinjet hastighet. Vi velge derfor å betrakte hele tankeeksperimentet i det inertialsystemet der A er i ro (under hele eksperimentet) og kaller i fortsettelsen dette for A's referansesystem.

I dette referansesystemet er trådens hastighet fra begynnelse til slutt endret fra null til $v = 6{,}00 \cdot 10^6$ m/s.

Målt fra A's referansesystem vil lengden av tråden (dersom den ikke strekkes eller går av) derfor være endret fra L_0 ved begynnelsestilstanden til L ved slutt-tilstanden, med følgende sammenheng mellom L_0 og L:

$$L = L_0/\gamma \qquad (1)$$

der

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (2)$$

(Se ligu. (65) og (67) i formelsamlingen vedlagt eksamensoppgaven.)

Differensen mellom opprinnelig lengde L_0 av tråden og lengden målt i skutt-tilstanden fra A's referansesystem (dersom tråden ikke brister eller forlenges) kaller vi ΔL. Da har vi:

$$\Delta L = L_0 - L \underset{\uparrow(1)}{=} L\gamma - L$$

$$= L(\gamma - 1) \qquad (3)$$

som gir for $\Delta L/L$:

$$\frac{\Delta L}{L} = (\gamma - 1) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1$$

$$\approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} v^2/c^2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$(v/c \ll 1)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6{,}0 \cdot 10^6}{3{,}00 \cdot 10^8}\right)^2 = \underline{2{,}0 \cdot 10^{-4}} \qquad (4)$$

Sentrene til romskipene B og C har i A's referansesystem hele tiden hatt samme akselerasjon og dermed hastighet. Avstanden mellom dem har dermed også alltid vært den samme og er det også etter akselerasjonsprogrammet er avsluttet.

Forat tråden ikke skal briste, må den derfor tåle forlengelsen ΔL gitt ovenfor ved ligning (3).

ΔL og L er begge sett fra A's referansesystem og tråden tåler observert fra hans (og alle andres inertiale) referansesystem kun en relativ forlengelse på $1{,}00 \cdot 10^{-4}$.

Den relative forlengelsen tråden må tåle for å ikke å briste under akselerasjons-prosessen er altså gitt ved ligu.(4) og lik $2{,}0 \cdot 10^{-4}$. Det er to ganger den forlengelsen den er oppgitt å skulle tåle.

Altså har tråden gått av under akselerasjonsprosessen.

Merknad.

Denne oppgaven ble gitt for å teste forståelsen av følgende fundamentale aspekt:

1) Avstanden mellom to punkt (her festepunktene til tråden) observert fra ett gitt inertialt referansesystem vil ikke endres når begge punktene hele tiden har samme hastighet observert i dette referansesystemet. Det er ingen forskjell på klassisk mekanikk og spesiell relativitetsteori når det gjelder dette fordi posisjonen til og avstanden mellom de to punktene hele tiden kan måles (dvs kan merkes av på et fysisk legeme i ro) i dette referansesystemet.

2) Et fysisk legeme (her tråden) som har en hastighet i forhold til et referansesystem vil i dette referansesystemet observeres med mindre lengde enn den lengden som observeres i det referansesystemet der legemet er i ro. Dette er et av de fundamentale aspekt der spesiell relativitetsteori (og virkeligheten) gir et annet resultat enn klassisk mekanisk teori.