NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk og Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48
Professor Helge Holden, tel. 73 59 35 14

EKSAMEN I SIF4018 MATEMATISK FYSIKK

Mandag 2. august 1999
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 3. september 1999.

Oppgave 1

Vis at

$$\int x^{-1}\, J_1(x)\, dx = -J_1(x) + \int J_0(x)\, dx,$$

der $J_n(x)$ er en Bessel-funksjon av første type.

Oppgave 2

a) Løsningen av Bessels differensiallikning

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0,$$

som er endelig i origo er proporsjonal med Bessel-funksjonen av første type og orden p, $J_p(x)$. Bruk Frobenius' metode til å vise at

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

b) Bruk den genererende funksjon for Bessel-funksjonene av første type til å vise at

$$\frac{d}{dx}\, J_p(x) = \tfrac{1}{2} J_{p-1}(x) - \tfrac{1}{2} J_{p+1}(x).$$

c) En partikkel med masse M befinner seg i et sylindrisk hulrom med ugjennomtrengelige vegger:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq r_0 \text{ og } 0 \leq z \leq L \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Her er benyttet sylinderkoordinater r, φ, z. Skriv opp den stasjonære Schrödingerlikning for partikkelens bølgefunksjon $\psi(\vec{r})$ i det indre av hulrommet.

Vis at Schrödingerlikningen har løsninger av formen

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\, e^{im\varphi}\, \sin(k\pi z/L), \tag{1}$$

der $R(r)$ for $r < r_0$ tilfredsstiller

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) + E_s R(r) = 0, \tag{2}$$

der sammenhengen mellom partikkelenergien E og konstanten E_s er

$$E_s = E - \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2ML^2}.$$

Hvorfor må m være heltallig? Hvorfor må k være heltallig?

d) Ved å innføre ny variabel ρ ved $r = \rho\sqrt{\hbar^2/2ME_s}$ fås differensiallikningen i punkt c) på dimensjonsløs form. Gjør det og uttrykk radialfunksjonen $R(r)$ ved en Bessel-funksjon. (Du skal her ikke bestemme hverken energiparameteren E_s eller normeringskonstanten).

e) Hvilken grensebetingelse oppfyller $R(r)$ ved $r = r_0$? Av dimensjonsgrunner må energiegenverdiene E kunne skrives på formen

$$E = \frac{\hbar^2}{2ML^2}\,\chi,$$

der χ er dimensjonsløs. Bestem den numeriske verdi av χ for grunntilstanden når egenfunksjonen i grunntilstanden er rotasjonssymmetrisk ($m = 0$), og $L = 3r_0$.

Oppgave 3

La L være en lineær operator på et Hilbert-rom H. Anta at både definisjonsområdet (,,domain") og rekkevidden („range") er lik H.

Vi sier at L er positiv dersom

$$\langle f, L(f)\rangle > 0$$

for alle $f \in H$, $f \neq 0$.

a) Anta at L er positiv og at λ er en egenverdi. Vis at da er $\lambda > 0$.

b) Vi sier at L er invertibel dersom det for hver $g \in H$ fins en entydig $f \in H$ slik at $L(f) = g$.

Anta at L er positiv. Vis at da er L invertibel.

Oppgave 4

a) Vis at de tre første Hermitepolynomene er

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x, \qquad \text{og} \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

b) En partikkel med masse $m = \hbar/\omega$ i harmonisk-oscillator-potensialet $V(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega x^2$ har ved $t = 0$ den normerte bølgefunksjonen

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{32}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x\, e^{-x^2}.$$

La sannsynligheten være p_n for at en måling av partikkelens energi gir verdien $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Bestem sannsynlighetene p_0, p_1 og p_2.

Oppgitt: For denne verdien av partikkelmassen vil energiegenfunksjonene være

$$\psi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\,(2^n\, n!)^{-\frac{1}{2}}\; H_n(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

der H_n er $n$te Hermitepolynom.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Hermite-polynomer

Differensiallikning:	$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n$	$=$	0
Genererende funksjon:	$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{s^n}{n!}$	$=$	e^{-s^2+2xs}
Rodrigues formel:	$H_n(x)$	$=$	$e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
Norm og ortogonalitet:	$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx$	$=$	$\sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm}$
Derivert:	H_n'	$=$	$2nH_{n-1}$
Rekursjonsformel:	H_{n+1}	$=$	$2xH_n - 2nH_{n-1}$

NB: Rottmann bruker en annen konvensjon for Hermite-polynomer.

Bessel-funksjoner av første type

Differensiallikning :	$x^2J_n'' + xJ_n' + (x^2-n^2)J_n$	$=$	0
Genererende funksjon :	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n$	$=$	$e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})}$
Negativ orden :	$J_{-n}(x)$	$=$	$(-1)^n\,J_n(x)$
Relasjoner :	$\frac{d}{dx}\left(x^pJ_p(x)\right) = x^pJ_{p-1}(x)$		$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$
	$J_{p-1}(x) + J_{p+1} = \frac{2p}{x}J_p(x)$		$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x)$
De tre første nullpunkter :	$J_0(x) = 0$ for x	$=$	$2.4048,\ 5.5201,\ 8.6537$
(m/fire desimaler)	$J_1(x) = 0$ for x	$=$	$3.8317,\ 7.0156,\ 10.1735$

Integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\,e^{-x^2}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ for heltallig } n.$$

Laplaceoperatoren i sylinderkoordinater

Med konvensjonen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ er

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dreieimpuls

I kulekoordinater er $\widehat{\vec{L}^2} = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

Egenverdier:

$$\widehat{\vec{L}^2}\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$
$$\widehat{L}_z\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = m\hbar\;Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$