NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk og Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48
Professor Helge Holden, tel. 73 59 35 14

EKSAMEN I SIF4018 MATEMATISK FYSIKK

Tirsdag 25. mai 1999
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 15. juni 1999.

Oppgave 1

Bestem integralet

$$\int_{\mathbb{R}} x\, H_n(x)\, H_m(x)\, e^{-x^2}\, dx,$$

der H_n og H_m er Hermite-polynomer av orden n og m.

Oppgave 2

a) Hvilke av operatorene $\widehat{p}_x^2$ og $x\widehat{p}_x$ er hermiteske? Begrunn svaret.

Hvorfor må kvantemekaniske operatorer som svarer til fysiske størrelser være hermiteske?

Vis at når egenverdiene for en hermitesk operator $\widehat{F}$ ikke er degenererte, så er de tilhørende egenfunksjoner ortogonale.

b) Beregn forventningsverdien (middelverdien) av impulskomponenten p_x for en partikkel i en tilstand beskrevet ved

$$\Psi(x) = \left(\pi\lambda^2\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-x^2/2\lambda^2 + ibx}.$$

Her er λ og b konstante størrelser.

Oppgave 3

a) Løsningen av Bessels differensiallikning

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

som er endelig i origo (Bessel-funksjonen av første type) er proporsjonal med

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \qquad p \geq 0.$$

(Dette skal ikke vises.)

Vis at

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x.$$

b) En partikkel med masse M befinner seg i et sfærisk hulrom med radius r_0 og med ugjennomtrengelig vegg:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq r_0 \\ \infty & \text{for } r > r_0 \end{cases}$$

Skriv opp den stasjonære Schrödingerlikning for partikkelens bølgefunksjon $\psi(\vec{r})$ i det indre av hulrommet.

Innfør kulekoordinater r, ϑ, φ og vis at Schrödingerlikningen har løsninger av formen

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\; Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{1}$$

der $R(r)$ for $r < r_0$ tilfredsstiller

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) + ER(r) = 0. \tag{2}$$

c) Ved å innføre ny variabel ρ ved $r = \rho\sqrt{\hbar^2/2ME}$ fås differensiallikningen i punkt b) på dimensjonsløs form. Gjør det og vis deretter at differensiallikningen for $y(\rho)$, definert ved $R(r) = y(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}}$ blir

$$\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \rho\frac{dy}{d\rho} + \left[\rho^2 - (l + \tfrac{1}{2})^2\right] y(\rho) = 0.$$

Uttrykk radialfunksjonen R ved en Bessel-funksjon. (Du skal her ikke bestemme hverken energiparameteren E eller normeringskonstanten).

d) Sett nå $l = 0$. Bruk resultatet i punkt a) og grensebetingelsen ved kuleoverflata til å beregne alle egenverdiene E_n for dette spesielle tilfellet.

Oppgave 4

Vis at ligningen

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$$

har en løsning på formen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

der

$$a_0 = a_1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}\big((2n+1)a_n - a_{n-1}\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vis at

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

løser rekursjonsformelen, og bestem y.

Vis at ligningen har en annen lineært uavhengig løsning på formen

$$y_2(x) = e^x \ln x + g(x)$$

der g er en analytisk funksjon, og bestem g.

Oppgave 5

For en partikkel med masse m i Coulombpotensialet $V(r) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ svarer følgende fire ortonormerte energiegentilstander til første eksiterte energinivå E_2:

$$
\begin{aligned}
\psi_{200} &= (32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(2 - r/a_0)\, e^{-r/2a_0} \\
\psi_{210} &= (32\pi a_0^5)^{-\frac{1}{2}}\, r\, e^{-r/2a_0} \cos\vartheta \\
\psi_{211} &= (64\pi a_0^5)^{-\frac{1}{2}}\, r\, e^{-r/2a_0} \sin\vartheta\; e^{i\varphi} \\
\psi_{21-1} &= (64\pi a_0^5)^{-\frac{1}{2}}\, r\, e^{-r/2a_0} \sin\vartheta\; e^{-i\varphi},
\end{aligned}
$$

der a_0 er Bohrradien.

Partikkelen er ved tidspunktet $t = 0$ i en tilstand beskrevet ved følgende normerte bølgefunksjon

$$\Psi(\vec{r}, 0) = (2\pi a_0^5)^{-\frac{1}{2}}\, re^{-r/a_0} \sin\vartheta\; e^{i\varphi}.$$

Ved en energimåling er det da en viss sannsynlighet p_2 for å finne verdien E_2. Bestem p_2.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Hermite-polynomer

Differensiallikning:	$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n$	$=$	0
Genererende funksjon:	$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{s^n}{n!}$	$=$	e^{-s^2+2xs}
Rodrigues formel:	$H_n(x)$	$=$	$e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
Norm og ortogonalitet:	$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx$	$=$	$\sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm}$
Derivert:	H_n'	$=$	$2nH_{n-1}$
Rekursjonsformel:	H_{n+1}	$=$	$2xH_n - 2nH_{n-1}$

NB: Rottmann bruker en annen konvensjon for Hermite-polynomer.

Rekkeutviklinger

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}; \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Integraler

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ for heltallig } n.$$

Laplaceoperatoren i kulekoordinater

Med konvensjonen $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Dreieimpuls

I kulekoordinater er $\widehat{\vec{L}^2} = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

Egenverdier:

$$\begin{aligned} \widehat{\vec{L}^2}\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) &= l(l+1)\hbar^2\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \\ \widehat{L}_z\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) &= m\hbar\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$