NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk og Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48
Professor Helge Holden, tel. 73 59 35 14

EKSAMEN I SIF4018 MATEMATISK FYSIKK

mandag 22. mai 2000
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 13. juni 2000.

Oppgave 1

Vis at Hermite-polynomene oppfyller

$$\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\, dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oppgave 2

Tilstanden til en partikkel med masse m er beskrevet ved den normerte bølgefunksjonen

$$\psi(x) = \left(\frac{4a^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\frac{1}{2}ax^2},$$

der a er en konstant. Finn forventningsverdien (middelverdien) av den kinetiske energi

$$T = \frac{p_x^2}{2m}$$

i denne tilstanden.

Oppgave 3

La $f(x)$ være egenfunksjoner for en hermitesk operator $\widehat{F}$.

a) Vis at de tilhørende egenverdier λ er reelle.

b) Vis at egenfunksjoner som svarer til forskjellige egenverdier er ortogonale.

Oppgave 4

a) Egenfunksjonene $P_\ell(z)$ for Legendre-operatoren

$$L(f) = -\left((1-z^2)f'\right)' \quad \text{på} \quad L^2((-1,1)),$$

med grensebetingelser $f(\pm 1)$ endelig, er polynomer av grad l som tilfredsstiller

$$L\left(P_\ell\right) = \ell(\ell+1)\, P_\ell, \qquad \ell \in \mathbb{N}_0\,.$$

Konvensjonell normering av Legendre-polynomet $P_n(x)$ kan uttrykkes på to måter:

(i) Koeffisienten foran høyeste potens er lik $\dfrac{(2n)!}{2^n n!^2}$, eller

(ii) $P_n(1) = 1$.

Vis ved hjelp av Rodrigues formel at normeringene (i) og (ii) er ekvivalente. (Tips: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.)

b) Funksjonene

$$Y_{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\vartheta)$$

er egenfunksjoner for den kvantemekaniske operator $\widehat{\vec{L}^2}$ som svarer til kvadratet av dreieimpulsen.

Den kvantemekaniske tilstand til en partikkel som er bundet til å bevege seg på overflata av enhetskula beskrives ved en bølgefunksjon $\Psi(\vartheta, \varphi, t)$. I et spesielt tilfelle har Ψ ved tida $t = 0$ formen

$$\Psi(\vartheta, \varphi, 0) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, \cos^2\vartheta.$$

Hvilke resultater kan en måling av $\vec{L}^2$ gi i dette tilfellet, og hvilke sannsynligheter er det for de mulige måleresultatene?

Oppgave 5

En partikkel med masse m befinner seg i et éndimensjonalt potensial med en ugjennomtrengelig vegg i origo:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } 0 \leq x \leq L \\ V_0 & \text{for } x > L, \end{cases}$$

der $V_0 > 0$.

a) Skriv opp den tidsuavhengige (stasjonære) Schrödingerlikningen for partikkelens bølgefunksjon $\psi(x)$. Anta at energiegenverdien E er mindre enn V_0.

Hva er den generelle løsning av den stasjonære Schrödingerlikning for $0 \leq x \leq L$?

b) Hva er den generelle løsning av den stasjonære Schrödingerlikning for $x > L$? Hva er den fysisk akseptable løsning for $x > L$?

c) Vis at løsningene du har funnet ovenfor og grensebetingelsene ved $x = 0$ og $x = L$ leder til følgende transcendente likning for energiegenverdien:

$$\tan \sqrt{\frac{2mEL^2}{\hbar^2}} = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}.$$

d) Bruk dette til å finne hvor stor partikkelmassen m må være, uttrykt bl.a. ved V_0 og L, for at det skal finnes minst én bunden tilstand?

e) La tilslutt $V_0 \to \infty$. Hva er da energiegenverdiene?

Oppgavesettet fortsetter på neste side.

Oppgave 6

La $L_n^{(\alpha)}$ betegne Laguerre-polynomene.

a) Bruk Rodrigues formel til å bestemme $L_0^{(\alpha)}(x)$ og $L_1^{(\alpha)}(x)$.

b) Bruk rekursjonsformelen (skal ikke vises)

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha - 1 - x)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \;-\; (n - 1 + \alpha)\, L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \qquad n \geq 2,$$

til å vise at den genererende funksjon

$$h(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\; w^n$$

tilfredsstiller differensiallikningen

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \left(\frac{\alpha+1}{1-w} - \frac{x}{(1-w)^2} \right) h, \qquad |w| < 1.$$

c) Vis at h kan skrives på formen

$$h(x,w) = \frac{A}{(1-w)^{\alpha+1}}\; \exp(-x/(1-w))$$

med en funksjon $A = A(x)$ som er uavhengig av w.

d) Vis at $A = e^x$.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Hermite-polynomer

$$
\begin{aligned}
&\text{Differensiallikning:} & H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n &= 0 \\
&\text{Rodrigues formel:} & H_n(x) &= e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \\
&\text{Norm og ortogonalitet:} & \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx &= \sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm} \\
&\text{Derivert:} & H_n' &= 2nH_{n-1} \\
&\text{Rekursjonsformel:} & H_{n+1} &= 2xH_n - 2nH_{n-1}
\end{aligned}
$$

NB: Rottmann bruker en annen konvensjon for Hermite-polynomer.

Legendre-polynomer

$$
\begin{aligned}
&\text{Norm og ortogonalitet :} & \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx &= \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm} \\
&\text{Genererende funksjon :} & \sum_{n=0}^{\infty} s^n\,P_n(x) &= (1-2xs+s^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\text{Rodrigues formel :} & P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \\
&\text{Polynomene av lav orden :} & P_0(x) &= 1 \\
& & P_1(x) &= x \\
& & P_2(x) &= \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \\
& & P_3(x) &= \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x
\end{aligned}
$$

Laguerre-polynomer

$$
\text{Rodrigues formel :}\quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right),
$$

Integraler

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,c^{-\frac{1}{2}}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-cx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,c^{-\frac{3}{2}}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\,e^{-cx^2}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\,c^{-\frac{5}{2}} \qquad (c > 0).
$$

$$
\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ for heltallig } n.
$$

Dreieimpulsoperatorer

I kulekoordinater med konvensjon $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, y = r\sin\vartheta\sin\varphi, z = r\cos\vartheta$ er

$$
\widehat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad \text{og} \quad \widehat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}.
$$

$$
\text{Egenverdier:}\quad
\begin{aligned}
\widehat{\vec{L}}^2\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= \ell(\ell+1)\hbar^2\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \\
\widehat{L}_z\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= m\hbar\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)
\end{aligned}
$$

Egenfunksjonene $Y_{\ell m}$ er normert slik at $\iint |Y_{\ell m}|^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 1$.