Løsningsforslag

Eksamen 22.05.00
SIF4018 Matematisk fysikk

Oppgave 1

Ved å addere de i vedlegget oppgitte relasjonene

$$H_n' = 2nH_{n-1} \qquad \text{og} \qquad H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

fås

$$H_{n+1} = 2xH_n - H_n' = -e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H_n(x) \right).$$

Ved $n \to n-1$ er dette

$$e^{-x^2} H_n(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} H_{n-1}(x) \right).$$

Integrasjon fra 0 til x gir relasjonen som skulle bevises.

Alternativ løsning: Bruk av Rodrigues formel gir

$$\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\, dt = (-1)^n \int_0^x \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}\, dt = (-1)^n \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\, e^{-t^2} \right]_0^x = -\left[e^{-t^2} H_{n-1}(t) \right]_0^x,$$

som er høyre side av relasjonen som skulle bevises.

Oppgave 2

Da $\widehat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$, blir forventningsverdien av T

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \widehat{p}_x^2 \psi(x)\, dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi''(x)\, dx$$

Innsatt for ψ fås

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{4a^3}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (3ax^2 - a^2x^4) e^{-ax^2}\, dx = \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{4a^3}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{3\hbar^2 a}{4m}}}.$$

Oppgave 3

En hermitesk operator $\widehat{F}$ tilfredsstiller

$$\langle \phi, \widehat{F}\psi \rangle = \langle \widehat{F}\phi, \psi \rangle. \tag{1}$$

a) La f være en egenfunksjon, dvs $\widehat{F}f = \lambda f$. Innsetting av $\phi = \psi = f$ i (1) gir

$$\langle f, \lambda f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle,$$

eller

$$\lambda \langle f, f \rangle = \overline{\lambda} \langle f, f \rangle.$$

Da normen ikke er null, får vi $\lambda = \overline{\lambda}$ $(\lambda = \lambda^*)$. Altså er egenverdien reell.

b) Ved å sette $\phi = f$ og $\psi = g$, der g er en egenfunksjon med egenverdi μ, dvs

$$\widehat{F}g = \mu g,$$

inn i (1) fås

$$(\lambda - \mu)\langle f, g \rangle = 0.$$

Under forutsetningen $\lambda \neq \mu$ blir derfor

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Egenfunksjonene som hører til forskjellige egenverdier er derfor ortogonale.

Oppgave 4

a) Leddet med høyeste potens i Rodrigues formel er

$$\frac{1}{2^2 n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2^n n!} x^n = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} x^n,$$

ved å multiplisere med $n!$ over og under brøkstreken. Dette stemmer med normeringen (i).

La oss så beregne $P_n(1)$ vha Rodrigues formel:

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n (x+1)^n \right]_{x=1}.$$

Vi må derivere faktoren $(x-1)^n$ alle n gangene, med resultat $n!$, for å få noe $\neq 0$ fra denne faktoren. Altså vil alle ledd der den andre faktoren $(x+1)^n$ deriveres gi null bidrag. Denne faktoren kan derfor settes lik $(1+1)^n = 2^n$. Alt i alt får vi

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot n! \cdot 2^n = 1,$$

i overensstemmelse med normeringen (ii). Da begge normeringene stemmer med Rodrigues formel, er de ekvivalente.

b) Da

$$P_0 = 1 \qquad \text{og } P_2(\cos\vartheta) = \tfrac{3}{2}\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{2},$$

er

$$\cos^2\vartheta = \tfrac{2}{3}P_2(\cos\vartheta) + \tfrac{1}{3}P_0.$$

Sammenhengen $Y_{00} = \sqrt{1/4\pi}P_0$ og $Y_{20} = \sqrt{5/4\pi}P_2$ gir

$$\psi = \tfrac{2}{3}Y_{20}(\cos\vartheta) + \tfrac{1}{3}\sqrt{5}\,Y_{00}. \tag{2}$$

Generelt kan en måling av $\vec{L}^2$ bare gi egenverdiene for $\widehat{\vec{L}^2}$, altså en av verdiene $\hbar^2\ell(\ell+1)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Sannsynligheten for å måle egenverdi nr. ℓ er $p_\ell = |c_\ell|^2$, der c_ℓ er koeffisienten for den tilsvarende egenfunksjon i utviklingen av bølgefunksjonen,

$$\psi = \sum_\ell c_\ell\, Y_{\ell 0}(\cos\vartheta).$$

I dette tilfellet viser (2) at alle koeffisientene er null, unntatt c_0 og c_2. Derfor er det nå bare egenverdiene

$$\underline{\underline{E_0 = 0 \qquad \text{og} \qquad E_2 = 6\hbar^2}}$$

som er mulige måleresultater. De tilsvarende sannsynligheter blir

$$p_0 = |c_0|^2 = \underline{\underline{\tfrac{5}{9}}}; \qquad p_2 = |c_2|^2 = \underline{\underline{\tfrac{4}{9}}}.$$

Oppgave 5

a) Den stasjonære Schrödingerlikningen er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

I intervallet $0 \le x \le L$ er potensialet null. Schrödingerlikningen er

$$\psi''(x) = -\psi \cdot 2mE/\hbar^2,$$

og har den generelle løsning

$$\psi(s) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \qquad \text{med } k = \sqrt{2mE/\hbar^2} \tag{3}$$

i dette området.

b) I området $x > L$ er $V(x) = V_0$ og Schrödingerlikningen derfor

$$\psi''(x) = \psi \cdot 2m(V_0 - E)/\hbar^2,$$

og generell løsning

$$\psi(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, \qquad \text{med } \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}.$$

For å få en normerbar løsning må vi sette $D = 0$. Den fysisk akseptable løsning er derfor

$$\psi(x) = Ce^{-\kappa x}. \tag{4}$$

c) Siden potensialet er lik $+\infty$ for $x < 0$ er området $x < 0$ utilgjengelig, dvs $\psi = 0$ der. Da bølgefunksjonen er overalt kontinuerlig må bølgefunksjonen (3) være lik null for $x = 0$. Det gir $B = 0$.

Grensebetingelsen ved $x = L$ gjenstår. Da potensialet er endelig her er både ψ og ψ' kontinuerlige. Vi må altså skjøte løsningen (3), med $B = 0$, og løsningen (4) slik at bølgefunksjonen og dens deriverte er kontinuerlige i $x = L$. Det gir to likninger:

$$A\sin(kL) = Ce^{-\kappa L} \tag{5}$$
$$Ak\cos(kL) = -C\kappa e^{-\kappa L} \tag{6}$$

Ved å eliminere C fås

$$Ak\cos(kL) = -A\kappa\sin(kL).$$

Vi må ha $A \neq 0$ for å få en ikkeforsvinnende bølgefunksjon. Altså er

$$\tan(kL) = -k/\kappa,$$

eller innsatt for k og κ:

$$\tan\sqrt{\frac{2mEL^2}{\hbar^2}} = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}, \tag{7}$$

som vi skulle vise.

d) Energiverdien E er mindre enn V_0. Venstre side av (7) er derfor positiv når

$$\frac{2mV_0L^2}{\hbar^2} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \tag{8}$$

for da er argumentet av tangensfunksjonen mindre enn $\pi/2$. Høyre side av (7) er aldri positiv, slik at når (8) er oppfylt har vi ingen løsning av (7).

For $2mV_0L^2/\hbar^2 > \pi^2/4$, derimot, vil vi alltid har minst én løsning. Venstre side av (7) blir $-\infty$ for en viss verdi av E i intervallet $(0, V_0)$ og deretter monotont økende med økende E. Høyre side av (7), derimot, er en kontinuerlig og monotont avtagende funksjon av E, som avtar fra 0 til $-\infty$ når E går fra 0 til V_0. Grafene av venstre og høyre side av (7) vil derfor skjære hverandre i intervallet $0 \leq E \leq V_0$, slik at vi har løsning. (En graf vil illustrere dette greitt.)

Konklusjonen er at når

$$\underline{\underline{m > \frac{\pi^2\hbar^2}{8V_0L^2}}}$$

vil det være minst én bunden tilstand.

Alternativ løsning: Når massen avtar øker energiegenverdiene, og når den siste energiverdien når toppen av brønnen ($E = V_0$) er det ingen bundne tilstander mere. For dette grensetilfellet blir likning (7):

$$\tan\sqrt{\frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}} = \infty.$$

Den minste verdien av m som tilfredsstiller dette er gitt ved

$$\sqrt{\frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}} = \frac{\pi}{2},$$

dvs

$$m = \frac{\pi^2\hbar^2}{8V_0L^2}.$$

Massen må være større enn dette.

e) For $V_0 = \infty$ er høyre side av (7) lik null, som gir

$$\tan\sqrt{\frac{2mEL^2}{\hbar^2}} = 0.$$

Tangensfunksjonen er null når argumentet er et heltallig multiplum av π. Det gir energiegenverdiene

$$E_n = \underline{\underline{\frac{\pi^2n^2\hbar^2}{2mL^2}}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

En ser lett at negative heltall n gir ikke noe nytt (samme energi og derfor samme bølgefunksjon), mens $n = 0$ gir $E = 0$ som medfører $\psi = 0$. Derfor er n her begrenset til positive heltall.

Oppgave 6

a) Direkte innsetting gir

$$L_0^{(\alpha)} = 1 \text{ og } L_1^{(\alpha)} = 1 + \alpha - x.$$

b) For enkelhets skyld skriver vi $L_n = L_n^{(\alpha)}$. Dermed

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial w} &= \sum_{n=0}^{\infty} nL_n w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n w^{n-1} = L_1 + \sum_{n=2}^{\infty} nL_n w^{n-1} \\
&= L_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left((2n+\alpha-1-x)L_{n-1} - (n-1+\alpha)L_{n-2}\right) w^{n-1} \\
&= 1 + \alpha - x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)L_{n-1}w^{n-1} + (\alpha+1-x)\sum_{n=2}^{\infty} nL_{n-1}w^{n-1} \\
&\qquad - \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)L_{n-2}w^{n-1} - (\alpha+1)\sum_{n=2}^{\infty} nL_{n-2}w^{n-1} \\
&= 1 + \alpha - x + 2w\frac{\partial h}{\partial w} + (\alpha+1-x)(h-1) - w^2\frac{\partial h}{\partial w} - (\alpha+1-x)(h-1)
\end{aligned}$$

Ved å ordne på leddene finner vi

$$(1-w)^2\frac{\partial h}{\partial w} = (\alpha+1)(1-w)h - xh,$$

som er det vi skulle vise.

c) Vi skriver om uttrykket til

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\alpha+1}{1-w} - \frac{x}{(1-w)^2},$$

som er en separabel ligning som integreres til

$$\ln h = -(\alpha+1)\ln(1-w) - \frac{x}{(1-w)} + e^A = \ln\left(\frac{A}{(1-w)^{\alpha+1}}\exp\big(-x/(1-w)\big)\right)$$

der e^A er en w uavhengig konstant. Dette gir

$$h(x,w) = \frac{A}{(1-w)^{\alpha+1}}\exp\big(-x/(1-w)\big)$$

(Alternativt kan du verifisere direkte at det oppgitte uttrykk passer i ligningen.)

d) Innsetting av $w = 0$ i definisjonen av h gir $h(x,0) = L_0^{(\alpha)} = 1$. Fra uttrykket fra foregående punkt finner vi samtidig at $h(x,0) = Ae^{-x}$, eller $A = e^x$.