NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk og Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48
Professor Helge Holden, tel. 73 59 35 14

EKSAMEN I SIF4018 MATEMATISK FYSIKK

mandag 28. mai 2001
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemiddel: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Ett ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 18. juni 2001.

Oppgave 1

a) Bruk Taylor-rekken til cosinus og formelen

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta \, d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

til å vise at

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\, d\theta. \qquad (1)$$

b) Bruk (1) til å vise at

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0(x)\, dx = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta}, \qquad \alpha > 0.$$

Her er J_0 Bessel-funksjonen av første type av orden null.

Oppgave 2

Den normerte bølgefunksjonen for en partikkel i én dimensjon er ved tidspunktet $t = 0$

$$\Psi(x,0) = (2a/\pi)^{\frac{1}{4}}\, e^{-a(x-c)^2+ibx},$$

der $a > 0$, b og c er konstanter. Beregn middelverdiene (forventningsverdiene) $\langle x \rangle$ og $\langle p_x \rangle$ for partikkelens posisjon og impuls.

Oppgave 3

a) Definer

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} \frac{H_n(x)}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}}$$

der H_n er Hermite-polynomet av orden n. Vis at da er

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = \sqrt{n}\, \psi_{n-1}(x).$$

b) Vis at

$$H_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ odde,} \\ \frac{(-1)^m (2m)!}{m!} & \text{for } n = 2m. \end{cases}$$

c) En partikkel med masse m befinner seg i en boks med grunnflate L^2 i xy-planet og vegger normalt på grunnflata. Grunnflata og veggene er ugjennomtrengelige, mens boksen er åpen i positiv z-retning. Partikkelen tiltrekkes til grunnflata med en kraft proporsjonal med høyden. Dette gir potensialet

$$V(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 z^2 & \text{for } z \geq 0, \quad 0 < x < L, \text{ og } 0 < y < L \\ \infty & \text{ellers} \end{cases},$$

når konstanten uttrykkes på konvensjonell måte. Vis at den tidsuavhengige Schrödingerlikningen tilfredsstilles av

$$\psi(x,y,z) = \sin \frac{n_x \pi x}{L} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{L} \cdot \phi(z).$$

der n_x og n_y er heltall og der $\phi(z)$ tilfredsstiller likningen for en harmonisk oscillator.

d) Bestem laveste energiegenverdi (grunntilstandsenergien) for partikkelen i denne boksen. (Benytt bl.a. kjente resultater for harmonisk oscillator.)

Oppgave 4

La p være et naturlig tall eller null. Gitt differensialligningen

$$-(xy')' + \frac{p^2}{x}y = \lambda xy. \qquad (2)$$

a) Innfør ny variabel $t = \sqrt{\lambda}x$, og vis at i denne variabelen reduserer (2) seg til Bessel-ligningen av orden p.

b) Betrakt ligning (2) på intervallet $[0, 1]$, og anta at y og y' begge er begrenset når $x \to 0$ og $y(1) = 0$. Begrunn at da er løsningen y på formen

$$y(x) = J_p(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad (3)$$

der λ tilfredsstiller

$$J_p(\sqrt{\lambda}\,) = 0. \qquad (4)$$

c) Du kan anta at ligning (4) har løsninger $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$. Kall de tilhørende funksjonene y_n. Hvorfor er

$$\int_0^1 xy_n(x)y_m(x)\, dx = 0$$

når $n \neq m$?

Oppgave 5

I denne oppgaven ser vi på den tidsuavhengige Schrödingerlikningen for en partikkel med masse m som befinner seg i et éndimensjonalt potensial $V(x)$.

a) Skriv ned den stasjonære Schrödingerlikningen for bølgefunksjonen $\psi(x)$. Dersom potensialet er proporsjonalt med en deltafunksjon,

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \qquad (5)$$

vil det eksistere følgende relasjon mellom bølgefunksjonens deriverte på hver side av origo og funksjonsverdien i origo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0+) - \psi'(0-)\right] = \alpha\psi(0).$$

Vis det.

b) Når konstanten α i potensialet (5) er positiv vil en bunden tilstand eksistere. Beregn energiverdien E_0 for denne.

c) La det så i tillegg være to ugjennomtrengelige vegger i $x = \pm L$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < -L \\ -\alpha\delta(x) & \text{for } -L \leq x \leq L \\ \infty & \text{for } x > L \end{cases} \tag{6}$$

For en bestemt verdi av α (gitt ved m, $\hbar$ og L) vil de to normerte energiegenfunksjonene (løsningene av den stasjonære Schrödingerlikning) med lavest energi være følgende:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{3/2L^3}\,(L - |x|) & \text{for } |x| \leq L \\ 0 & \text{for } |x| > L, \end{cases} \tag{7}$$

og

$$\psi_1(x) = \begin{cases} L^{-\frac{1}{2}}\,\sin(\pi x/L) & \text{for } |x| \leq L \\ 0 & \text{for } |x| > L. \end{cases} \tag{8}$$

Bruk grunntilstanden ψ_0 til å bestemme denne spesielle verdien av α. Hva er de tilsvarende energiegenverdiene E_0 og E_1? (Begrunn svarene).

d) Middelverdien (forventningsverdien) $\langle T \rangle$ av en partikkels kinetiske energi kan alltid skrives

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \, dx$$

for en bunden tilstand i et éndimensjonalt problem. Vis det.

Beregn middelverdien $\langle T \rangle$ når partikkelen er i grunntilstanden ψ_0 gitt i foregående punkt.

Beregn for grunntilstanden også middelverdien $\langle V \rangle$ av den potensielle energi $V(x)$ (bare potensialet i det indre $|x| < L$ bidrar).

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Hermite-polynomer

Differensiallikning:	$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$
Genererende funksjon:	$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{s^n}{n!} = e^{-s^2+2xs}$
Rodrigues formel:	$H_n(x) = e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
Norm og ortogonalitet:	$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm}$
Derivert:	$H_n' = 2nH_{n-1}$
Rekursjonsformel:	$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$

NB: Rottmann benytter en annen konvensjon for Hermite-polynomer.

Besselfunksjoner av første type

Differensiallikning :	$x^2 J_n'' + xJ_n' + (x^2 - n^2)J_n = 0$
Genererende funksjon :	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n = e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})}$
Negativ orden :	$J_{-n}(x) = (-1)^n\,J_n(x)$
Relasjoner :	$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(x)\right) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$
	$J_{p-1}(x) + J_{p+1} = \frac{2p}{x}\,J_p(x)$ $\qquad$ $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x)$

Harmonisk oscillator

Energiegenfunksjonene for en harmonisk oscillator i én dimensjon ($V = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$) er

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad \text{med } x = q\sqrt{m\omega/\hbar} \text{ og } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Partikkel i éndimensjonal boks

En partikkel mellom to ugjennomtrengelige vegger i avstand L har energiegenverdiene

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,n^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Integral/Taylor-rekke

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\,e^{-x^2}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ for heltallig } n.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$