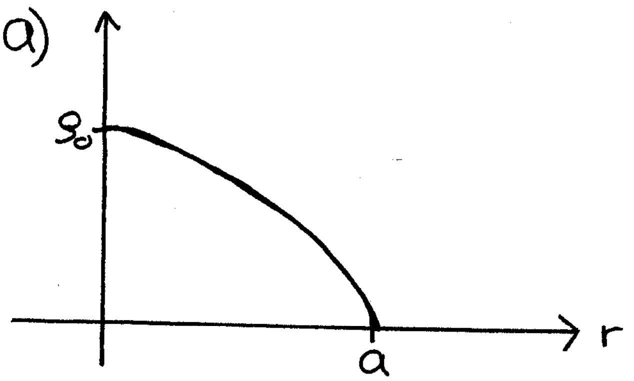
EKSAMEN SIF 4028
FYSIKK M/ELEKTROMAGNETISME
4 mai. 2000. Løsningsskisse

OPPGAVE 1.

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/a^2) & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

a)



Total ladning Q:

$$\underline{\underline{Q}} = \iiint \rho(r)\,dV = \rho_0 \int_0^a (1 - r^2/a^2)\,4\pi r^2\,dr =$$

$$4\pi\rho_0 \left[\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{5}\tfrac{r^5}{a^2}\right]_0^a =$$

$$4\pi\rho_0 a^3\left[\tfrac{5}{15} - \tfrac{3}{15}\right] = \underline{\underline{\frac{8\pi}{15}\rho_0 a^3}}$$

b) Elektrisk feltstyrke må peke i radiell retning, pga kulesymmetri, ut fra kula, da $\rho_0 > 0$. $\vec{E}$ er konstant på en sirkel konsentrisk kula. Størrelsen på $\vec{E}(r)$ kan en finne vha Gauss lov; Gaussflate lik kule med radius $r > a$:

$$\oint \vec{E}\,d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E} \parallel d\vec{A}$$

$$Q_{encl} = \frac{8\pi}{15}\rho_0 a^3$$

$$E \cdot \oint dA = \frac{8\pi}{\varepsilon_0 15}\rho_0 a^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{8\pi}{\varepsilon_0 15}\rho_0 a^3 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(r)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\underbrace{\left(\frac{8\pi}{15}\rho_0 a^3\right)}_{Q}\hat{e}_r = \frac{Q\,\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}}}$$

Dette er uttrykket for $\vec{E}(r)$ utenfor en punktladn Q i origo

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{d}{dr}V(r)$$

$$\underline{\underline{V(r)}} = V(\infty) - \int_\infty^r \vec{E}(r)\,d\vec{r} \underset{d\vec{r} \parallel \vec{E}}{=} 0 - \int_\infty^r \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r = \underline{\underline{\frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Dette er uttrykket for V(r) utenfor en punktladning Q i origo

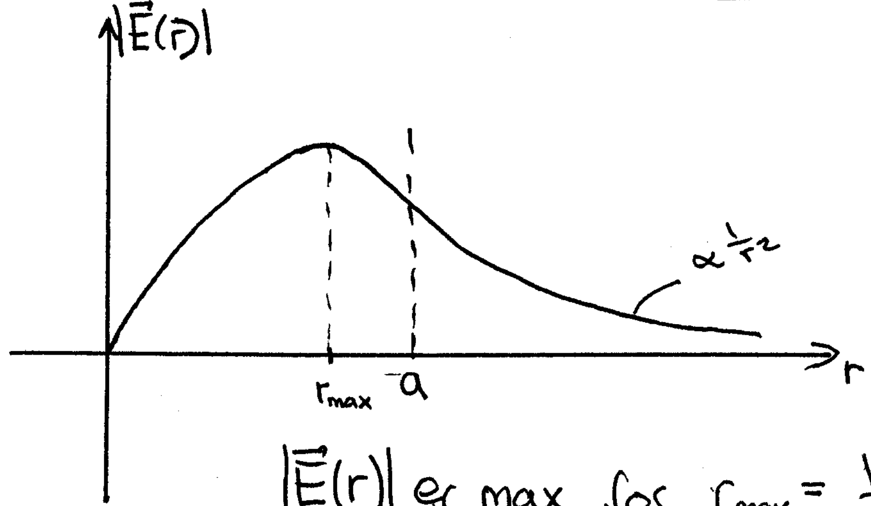
c) Bruker Gauss' lov til å finne $\vec{E}(r)$ for $r \le a$.
Legger også her kule som Gaussflate og $\vec{E} \parallel d\vec{A}$. Forskjellen her er at Q_{end} vil variere med r.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{end}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int (1 - r^2/a^2) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{5} r^5/a^2\right]_0^r$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right]\hat{e}_r}} = \underline{\underline{\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{3r^2}{5a^2}\right]\hat{e}_r}}$$



$$E'(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - 3r^2/5a^2\right) = 0$$

$$r^2 = \frac{5}{9}a^2$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{3}a \approx 0{,}745a$$

$$\underline{\underline{|\vec{E}(r)| \text{ er max for } r_{max} = \frac{\sqrt{5}}{3}a}}$$

Elektrisk potensiale for $r \le a$:

$$V(r) = V(a) - \int_a^r \vec{E}(r)\, d\vec{l} = V(a) + \int_r^a E(r) dr$$

Siden vi ikke kan ha sprang i potensialet er $V(a)$ gitt ved uttrykket vi fant i 1b; $V(a) = \frac{2\rho_0 a^2}{15\varepsilon_0}$

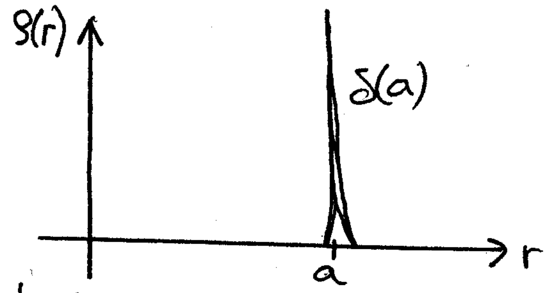
$$\underline{\underline{V(r)}} = \frac{2\rho_0 a^2}{15\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_r^a \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right) dr = \frac{2\rho_0 a^2}{15\varepsilon_0} + \left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2}\right]_r^a$$

$$= \frac{2\rho_0 a^2}{15\varepsilon_0} + \left[\frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{20} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right] = \rho_0/\varepsilon_0 \left[\frac{2}{15}a^2 + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{20} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right]$$

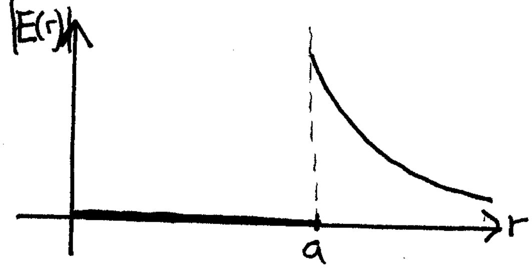
$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right] = \underline{\underline{\frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{5}\frac{r^4}{a^4}\right]}}$$

d) Hvis kula hadde vært en leder, ville all ladning Q lagt seg på overflata.

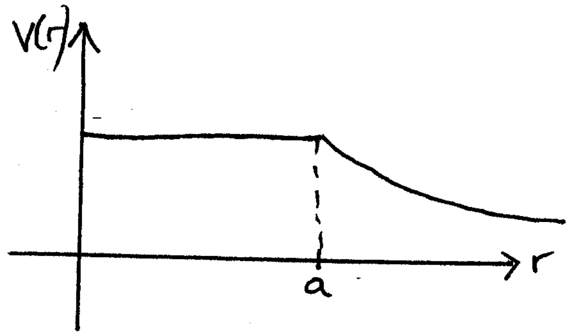
$\rho(r) = 0$ for alle $r \neq a$



Ingen ladning andre steder enn på overflata.



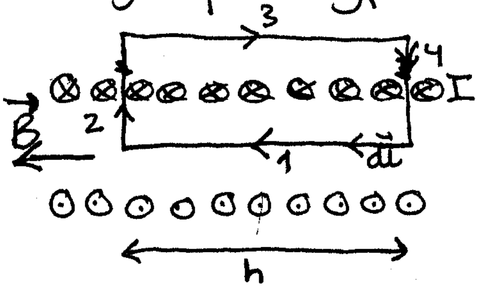
E-felt innenfor null; utenfor som fra punktladning



Potensialet innenfor konstant; utenfor som fra punktladning.

OPPGAVE 2

Solenoide; lengde l, N viklinger, strøm I. Bruker Amperes lov i en integrasjonssløyfe som vist på figuren.



← Snitt av solenoiden på langs

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$$

$$\underbrace{\int_1 \vec{B}\,d\vec{l}}_{\vec{B} \parallel d\vec{l}} + \underbrace{\int_2 \vec{B}\,d\vec{l}}_{\vec{B} \perp d\vec{l}} + \underbrace{\int_3 \vec{B}\,d\vec{l}}_{\text{langt unna; } \vec{B}=0} + \underbrace{\int_4 \vec{B}\,d\vec{l}}_{\vec{B} \perp d\vec{l}} = \mu_0 \underbrace{\frac{IN}{l}}_{\text{antall viklinger pr lengdeenhet}} \cdot h$$

Siden $R \ll l$, kan $\vec{B}$ antas konstant inni solenoiden og lik null utenfor. $\vec{B}$-feltet har ingen komponenter parallelt kortsidene.

Dette gir: $B \cdot h + 0 + 0 + 0 = \mu_0 \frac{IN}{l} \cdot h \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 N I}{l}}}$ retning mot venstre på fig

$$\underline{\underline{L}} = \frac{N \Phi_B}{I} = \frac{N \cdot \int \vec{B}\,d\vec{A}}{I} = \frac{N \cdot B \cdot \pi R^2}{I} = \frac{N \cdot \mu_0 N I \pi R^2}{I\,l}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}}}$$

b) Sylindersk jernstav; $\mu_0 \to \mu$

$R = 5{,}0\cdot 10^{-2}\,m$, $l = 1{,}0\,m$, $I = 2A$, $N = 1200$, $\mu_r = 1500$

$$\underline{\underline{\Phi_B}} = \int \vec{B}\,d\vec{A} = B\cdot A = \frac{\mu_r \mu_0 N\cdot I}{l}\cdot \pi R^2$$

$$= \frac{1500\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\,H/m\cdot 1200\cdot 2{,}0A\cdot \pi\cdot (0{,}05)^2 m^2}{1m} = \underline{\underline{0{,}0355\,Wb}}$$

$[H\cdot A = V/A\cdot s\cdot A = V\cdot s = Wb]$

Spolens selvinduktans: $\underline{\underline{L}} = \frac{\mu_r \mu_0 N^2\cdot \pi R^2}{l} = \underline{\underline{21{,}32H}}$

c) Oppgavetekst noe uklar. Må bruke N_1 og l_1 fra oppgave 2b.

B-feltet generert av den ytre spolen er gitt ved $B = \frac{\mu_0 i N_1}{l}$

Dette setter opp følgende fluks i den indre;

$$\Phi_B = \oint \vec{B}\,d\vec{A} = \frac{\mu_0 N}{l}\cdot i\cdot \pi R_2^2 = \mu_0 \pi R_2^2\cdot \frac{N_1}{l_1}\, i$$

Dette tilsvarer en ems (fra Faradays lov):

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}\cdot N_2 = -\mu_0 \pi R_2^2\cdot \frac{N_1 N_2}{l}\underbrace{\frac{di}{dt}}_{-I_0 \sin\omega t\cdot\omega} = \underline{\underline{\mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_1 N_2}{l} I_0 \omega \sin\omega t}}$$

må gange med N_2 fordi vi har N_2 sløyfer; hver sløyfe setter opp $-\frac{d\Phi_B}{dt}$

$\boxed{\omega = 2\pi f}$

Finner tallverdi; bruker N_1 og l fra oppgave 2b;

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,H/m\cdot \pi\cdot (0{,}03)^2 m\cdot \frac{1200\cdot 1000}{1m}\cdot 2{,}0A\cdot 2\pi\cdot 30Hz\cdot \sin\omega t$$

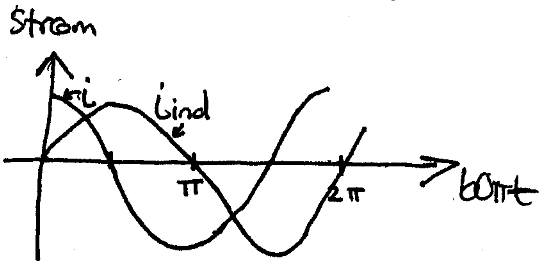
$$= \underline{\underline{1{,}61V\cdot \sin(60\pi t)}}$$

$\left[\frac{H}{m^2}\cdot m^2\cdot A\cdot \frac{1}{s} = \frac{HA}{s} = \frac{VsA}{As} = V\right]$

$i \propto \cos\omega t$

$i_{indusert} \propto \sin\omega t$

Det er en faseforskjell på $90°$ mellom den induserte strømmen og strømmen i ytre spole.



OPPGAVE 3

a) Kapasitansen for en platekondensator; $C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$

Her har vi luft mellom platene; så $\varepsilon = \varepsilon_0$ $(\varepsilon_r = 1)$

$A = a^2$, $a = 14{,}0\,cm$, $d = 0{,}20\,cm$, $V = 12{,}0\,V$

$d \ll a$, så vi ser bort i fra randeffekter.

$$\underline{\underline{C}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,F/m \cdot \frac{(0{,}14)^2\,m^2}{(0{,}002)\,m} = \underline{\underline{86{,}7\,pF}}$$

Ladningen; $\underline{\underline{Q}} = CV = 86{,}7\,pF \cdot 12V = \underline{\underline{1{,}04\,nC}}$

Energien lagret i kondensatoren:

$$\underline{\underline{U}} = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}04\,nC) \cdot 12V = \underline{\underline{6{,}24\,nJ}}$$

b) Vi øker avstanden til 3,5 mm. Energien lagret i kondensatoren vil øke fordi Q er konstant og V vil øke

antar ingen lekkasje!

Vi kan finne V (og dermed økning i energi) ved å bruke at Q er den samme og at potensialet er gitt ved $E \cdot d = V$, E endrer seg ikke $\left(E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\right)$ og vi får:

$$\frac{V_{før}}{d_{før}} = \frac{V_{etter}}{d_{etter}} \Rightarrow \underline{V_{etter}} = V_{før} \cdot \frac{d_{etter}}{d_{før}} = 12V \cdot \frac{3{,}5\,mm}{2\,mm} = \underline{21V}$$

Energi lagret; $\underline{U} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(1{,}04\,nC) \cdot 21V = \underline{10{,}92\,nJ}$

Økning i energi; $\underline{\underline{\Delta U = 4{,}68\,nJ}}$

c) Spenninga synker til $V_1/3$

- med symboler: (1 er situasjonen i a), 2 er situasjonen i c))

$C_1 = \frac{Q}{V_1}$ $\quad C_2 = \frac{Q}{V_2}$

$V_2 = \frac{1}{3}V_1$ $\quad d_2 = 2{,}5\,d_1$

$C_2 = \frac{Q}{V_2} = \frac{Q}{\frac{1}{3}V_1} = 3C_1$

$$C_2 = \frac{\varepsilon A}{d_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{2{,}5\,d_1} = 3C_1 = 3\,\frac{\varepsilon_0 A}{d_1}$$

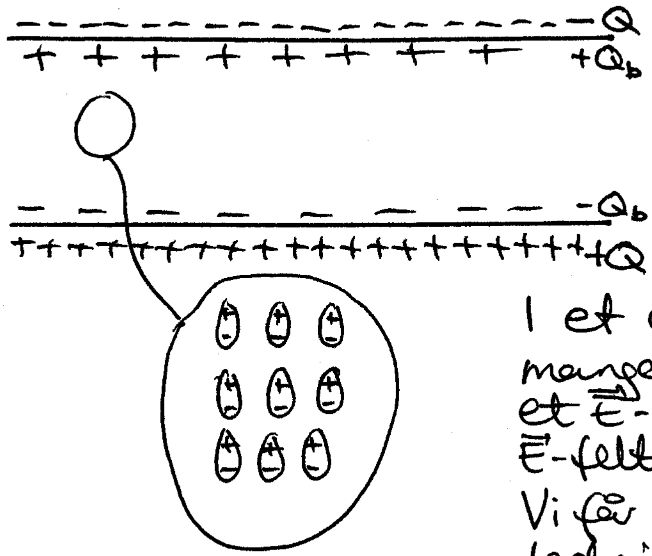
$$\frac{\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r \cancel{A}}{2{,}5\cancel{d_1}} = 3 \cdot \frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{\cancel{d_1}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_r = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5}}$$

Vi kunne også ha satt inn tall, og får:

$$C_2 = \frac{Q}{V_2} = \frac{1{,}04\,nC}{1/3 \cdot 12V} = 2{,}6\cdot 10^{-10}F$$

$$C_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon_r}} = \frac{C_2 d_2}{\varepsilon_0 A} = \frac{2{,}6\cdot10^{-10}F \cdot 0{,}005m}{8.8519\cdot10^{-12}\, F/m\cdot(0{,}14)^2 m^2} = \underline{\underline{7.49}}$$



I et dielektrisk materiale er det mange små dipoler. Når vi setter på et $\vec{E}$-felt, vil disse rette seg inn etter $\vec{E}$-feltet; materialet blir polarisert. Vi får en resulterende positiv bundet ladning ved den negative kondensator-plata og en negativ bundet ladning ved den positive plata.

Bundet ladning:

① Kan regne med polarisasjon;

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E} \qquad |\vec{E}| = \frac{V_2}{d_2} = \frac{4V}{5mm} = 800\, V/m$$

$$|\vec{P}| = (7{,}5-1)\cdot 8{,}852\cdot10^{-12}\, F/m \cdot 800\, V/m = 4{,}6\cdot10^{-8}\, C/m^2$$

$$|\vec{P}| = \sigma_B \Rightarrow \underline{\underline{Q_B}} = \sigma_B\cdot A = 4{,}6\cdot10^{-8}\, C/m^2 \cdot (0{,}14)^2 m^2 = \underline{\underline{9{,}02\cdot10^{-10}\, C}}$$

② Kan finnes uten $\vec{D}/\vec{P}$; (se Young/Freedman s. 784-786)

E-felt uten dielektrikum $\doteq E_0$, E-felt med dielektrikum $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma - \sigma_B}{\varepsilon_0}, \quad \begin{array}{l}\sigma_B = \text{bundet ladningtettheten}\\ \sigma = \text{total ladningstettheten}\end{array}$$

$$E\cdot\varepsilon_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma-\sigma_B}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_B = (1 - 1/\varepsilon_r)\cdot\sigma$$

$$\underline{\underline{\sigma_B}} = (1 - 1/7{,}5)\cdot\frac{1{,}04\,nC}{(0{,}14)^2 m^2} = \underline{\underline{4{,}6\cdot10^{-8}\, C/m^2}}$$

$$\underline{\underline{Q_B = 9{,}02\cdot10^{-10}\, C}}$$

Fag SIF4028
Eksamen 4. mai 2000

Studentnummer:________.

SVAR-ARK FOR OPPGAVE 4

Sett ett kryss for hver oppgave (gardering ikke tillatt)

	Svar-alternativer				
Oppgave	a	b	c	d	e
A1		X			
A2				X	
A3	X				
B1					X
B2				X	
B3		X			

Dette arket leveres sammen med resten av eksamensbesvarelsen.