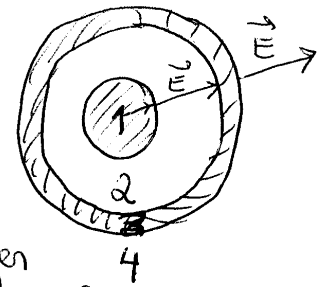
KONTEKSAMEN SIF4028
FYSIKK M/ ELMAG
7/8-00, LØSNINGSSKISSE

OPPGAVE 1



a) Skal vise at $\vec{E}(r) = \frac{E_0}{r}\hat{e}_r$

Av symmetrigrunner må E-feltet overalt være radielt rettet ut fra /inn mot (avhengig av λ_1 og λ_2) sentorlinjen i den indre sylinderen. Bruker Gauss' lov i de fire områdene:

1) $r<a$

Siden all overskuddsladning legger seg på overflata av metallsylinderen, vil Gauss' lov (Gaussflate = sylinder med radius $<a$) gi at $\vec{E}(r) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E_0 = 0}}$

2) $a<r<R$

Legger en Gaussflate = sylinder med radius $a<r<R$ og lengde l, som med Gauss' lov gir: $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$
- bare sylinderflata gir bidrag; $\vec{E} \perp \vec{A}$ på endeflatene
- E er konstant på sylinderflata; radiell; $\vec{E} \parallel \vec{A}$
- $Q_{encl} = \lambda_1 \cdot l$ for lengde l

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda_1 l}{\varepsilon_0}\ ;\ E(r) = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0 2\pi r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_r \Rightarrow \underline{\underline{E_0 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}}}$$

3) $R<r<R+d$

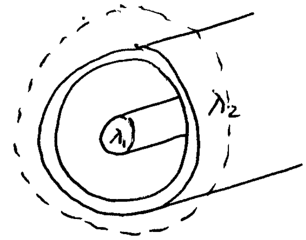
E-felt er alltid null inni en leder (overskuddsladning legger seg på indre flate slik at total ladning innenfor ei Gauss-flate blir null) $\vec{E}(r) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E_0 = 0}}$

4) $r > R+d$

Legger ei Gaussflate utenfor koaksialkabelen, veldig analogt tilfelle 2), og får:

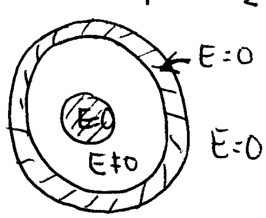
$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda_1 l}{\varepsilon_0} + \frac{\lambda_2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0}$$



$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0} \cdot \hat{e}_r \Rightarrow \underline{\underline{E_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi \varepsilon_0}}}$$

b) For $\lambda_1 = -\lambda_2$ får vi at E-feltet for $r > R+d = 0$, dvs



eneste område hvor $E \neq 0$ er mellom de to sylindrene (område 2 over)

Energitetthet: $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ med $E = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$ for $a<r<R$

Må integrere opp; $dV = 2\pi r dr \cdot l$

Energi; $U = \int_r u\,dV = \int_a^R u \cdot 2\pi r dr \cdot l$

Energi pr meter sylinderlengde; $\underline{\underline{\frac{U}{l}}} = \int_a^R u \cdot 2\pi r dr = \int_a^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 2\pi r dr$

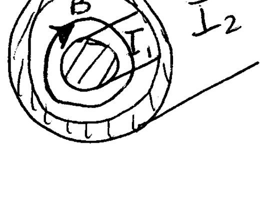
$$= \int_a^R \frac{\lambda_1^2\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^R \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{a}\right) =$$

$$\frac{(2{,}0 \cdot 10^{-6})^2}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \ln\left(\frac{5}{2}\right) \frac{C^2/m^2}{F/m} = \underline{\underline{3{,}296 \cdot 10^{-2}\ J/m}}$$

$$\left[\frac{C^2}{mF} = \frac{C^2 J}{m \cdot A^2 s^2} = \frac{J}{m}\right]$$

c) Likestrøm gjennom indre og ytre sylinder - skal finne $\vec{B}(r)$

$\vec{B}(r)$ må bli konsentriske sirkler om koaksialkabelens sentrum $\vec{B}(r) = B(r)\,\hat{e}_\theta$



Vi gjør som i oppgave a); deler opp i 4 områder. Bruker Ampere's lov med integrasjonssløyfe konsentriske sylinderne.

1) $r<a$

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{end}$; $\vec{B} \parallel d\vec{l}$; B er konstant på integrasjonsløyfa

$\mu = \mu_0 \mu_r$ inni metallet.

$$B \cdot 2\pi r = \mu \cdot I_1 \cdot \frac{\pi r^2}{\pi a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu I_1}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{B}(r) = \frac{\mu I_1}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{e}_\theta}}$$

Strøm innenfor;

$$I_{end} = I_1 \cdot \frac{A_{innenfor}}{A_{indre\ sylinder}} = I_1 \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I_1 \frac{r^2}{a^2}$$

Når strømtransporten er jevnt fordelt over tverrsnittet.

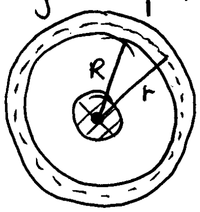
2) $a<r<R$

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{end}$ $\quad I_{end} = I_1$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}, \quad \underline{\underline{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{e}_\theta}}$$

3) $R<r<R+d$

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{end}$



Må finne I_{end}, og derfor strøm i ytre sylinder innenfor en radius r.

$$I_{end} = I_1 + I_2 \frac{A_{innenfor}}{A_{ytre\ sylinder}} = I_1 + I_2 \left(\frac{\pi r^2 - \pi R^2}{\pi (R+d)^2 - \pi R^2} \right)$$

$$= I_1 + I_2 \left(\frac{r^2 - R^2}{(R+d)^2 - R^2} \right)$$

Dette gir $\underline{\underline{\vec{B}(r) = \frac{\mu}{2\pi r} \left[I + I_2 \left(\frac{r^2 - R^2}{(R+d)^2 - R^2} \right) \right] \hat{e}_\theta}}$, $\mu = \mu_0 \mu_r$

4) $r > R+d$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi r} \hat{e}_\theta}}$$

($\vec{B}(r)$ er ikke kontinuerlig fordi $\mu_0 \neq \mu$)

4

d) Når $I_1 = -I_2$ får vi; $\left(H = \frac{1}{\mu} B \right)$ med $\mu = \mu_0$ i vakuum!)

1) $r < a$, $B(r) = \frac{\mu I_1}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2} \Rightarrow H(r) = \frac{I_1}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2}$

2) $a < r < R$, $B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \Rightarrow H(r) = \frac{I_1}{2\pi r}$

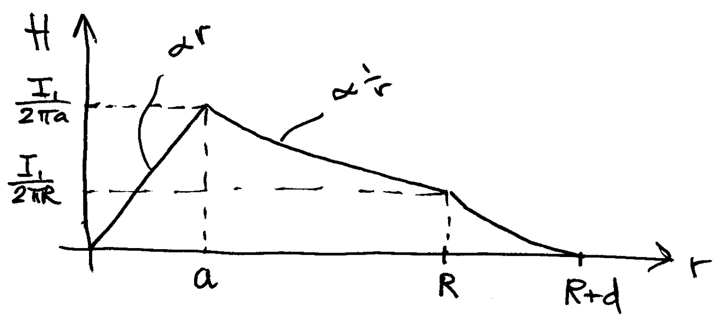
3) $R < r < R+d$ $B(r) = \frac{\mu I_1}{2\pi r}\left[1 - \left(\frac{r^2 - R^2}{(R+d)^2 - R^2}\right)\right]$

$$\Rightarrow H(r) = \frac{I_1}{2\pi r}\left[1 - \frac{r^2 - R^2}{(R+d)^2 - R^2}\right]$$

4) $r > R+d$ $B(r) = 0 \Rightarrow H(r) = 0$

Vi ser at $H(r)$ er kontinuerlig for $r = a$ $\left(H = \frac{I_1}{2\pi a} \right)$ og $r = R$ $\left(H = \frac{I_1}{2\pi R} \right)$ og $r = R+d$ $(B = 0)$

Skisse:



OPPGAVE 2

a) $C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{L} = 1{,}39 \cdot 10^{-10} F = 139\ pF$

$Q = C_1 V_1 = 139\,pF \cdot 100V = 1{,}39 \cdot 10^{-8} C = 13{,}9\,nC$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{V_1}{d} = 5 \cdot 10^4\ V/m$

b) Feltstyrken mellom kulene (vha Gauss' lov)

$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{e}_r$

som gir $V_2 = -\int \vec{E}_2(r) d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ ged

Vi kan da finne C_2:

$$\underline{\underline{C_2}} = \frac{Q}{V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)$$

Innsatt tallverdier; $= 4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m} \cdot \left(\frac{0.05 \cdot 0.08}{0.08 - 0.05}\right) \text{m}$

$$= \underline{\underline{14.8\ \text{pF}}}$$

c) Antar at vi ikke har lekkasje av ladning;

$Q_{før} = Q_{etter}$, og setter resultatkapasitansen lik C_3

$C_1 V_1 = C_3 V_3$ hvor C_3 er gitt ved parallellkopling.

$$C_3 = C_1 + C_2$$

$$C_1 V_1 = (C_1 + C_2) V_3$$

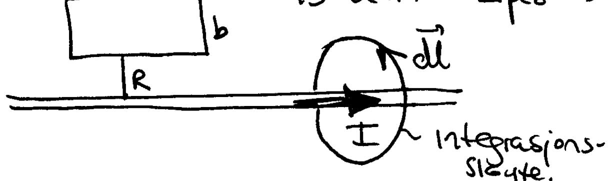
$$\underline{\underline{V_3}} = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} = \underline{\underline{90.4\ \text{V}}}$$

OPPGAVE 3.

a) B-feltet fra ledningen i avstand r er ifølge Amperes lov gitt ved $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$

$$B \cdot 2\pi r = I\mu_0 \Rightarrow \underline{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\theta}$$

retning gitt av høyrehåndsregel



Fluks gjennom den rektangulære sløyfa er gitt ved

$$\underline{\underline{\Phi_B}} = \int \vec{B} d\vec{A} = \int_R^{R+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \cdot dr = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{R+b}{R}\right]}} \text{ qed}$$

b) Parallelt ledningen → $\mathcal{E}_1 = 0$ fordi fluksen gjennom sløyfa ikke endrer seg! $\left(\frac{d\Phi_B}{dt} = 0\right)$

Når vi flytter sløyfa radielt, vil fluksen gradvis minke, og vi får indusert en ems;

Faradays lov: $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

For $t=0$ er $R=R_0$; med konstant v får vi at $R = R_0 + vt$

$\Phi_B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{R+b}{R}\right]$, ved tiden t; $\Phi_B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left[\frac{R_0+vt+b}{R_0+vt}\right]$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{R_0+vt+b}{R_0+vt}\right)\right]$$

Kjerneregel; (dobbelt!) $f = \ln\left(\frac{R_0+vt+b}{R_0+vt}\right)$, $u = \frac{R_0+vt+b}{R_0+vt} = 1 + \frac{b}{R_0+vt}$ $\quad y = vt$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$\frac{1}{1+\frac{b}{R_0+vt}} \cdot (-1) \cdot \frac{b}{(R_0+vt)^2} \cdot v = \frac{-bv}{\underbrace{(R_0+vt)^2}_{R^2} + b\underbrace{(R_0+vt)}_{R}}$$

$$= -\frac{bv}{R(R+b)}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}_2}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{bv}{R(R+b)} \overset{\text{tallverdier}}{=} \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 10\,\mathrm{A} \cdot \cancel{0{,}05\,\mathrm{m}} \cdot 0{,}03\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m/s}}{2\cancel{\pi} \quad 0{,}02\,\mathrm{m}\ (\cancel{0{,}05\,\mathrm{m}})}$$

$$= \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}}}$$

c) $I(t) = I_0 \cos\omega t$

Da har vi at $\Phi_B = \frac{\mu_0 I_0 a \cos\omega t}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$

og får:

$$\underline{\underline{\mathcal{E}_3}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = +\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right) \sin\omega t \cdot \omega = \underbrace{\frac{\mu_0 I a \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)}_{\text{Amplitude}} \sin\omega t$$

$$= \underline{\underline{2{,}88 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V} \cdot \sin\omega t}}$$

$2{,}88 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}$ e den største verdien $\mathcal{E}_3$ kan ha ($\sin\omega t = 1$)

OPPGAVE 4

A1	d
A2	b
A3	b
B1	e
B2	b
B3	c