NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4045 KVANTEMEKANIKK

Tirsdag 23. mai 2000
kl. 09.00 – 14.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

En side med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 13. juni 2000.

Oppgave 1

a) Bruk heve- og senkeoperatorer til å beregne forventningsverdiene (middelverdiene)

$$\langle q^2 \rangle \qquad \text{og} \qquad \langle q^4 \rangle$$

for en partikkel med masse m i grunntilstanden i harmonisk-oscillator-potensialet $V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$.

b) En partikkel med masse m beveger seg i én dimensjon og tiltrekkes til origo med en kraft proporsjonal avstanden, men med ulike kraftkonstanter på høyre og venstre side. Potensialet er

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} m c^2 \omega^2 q^2 & \text{for } q \leq 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 & \text{for } q \geq 0 \end{cases}$$

Vi skal i resten av oppgaven se på grunntilstandsenergien $E_0(c)$ i dette asymmetriske potensialet, som funksjon av den positive parameteren c.

Hva er $E_0(1)$? Hva er $E_0(\infty)$? (Begrunn svaret)

c) Finn hvorledes $E_0(c)$ avhenger av c for ekstremt små verdier av c.
(Tips: Innfør $\omega = \widehat{\omega}/c$ og la deretter $c \to 0$ for fast $\widehat{\omega}$.)

d) I Rayleigh-Schrödinger tidsuavhengig perturbasjonsteori løses egenverdiproblemet $\widehat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, der $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda\widehat{H}_1$, ved rekkeutvikling i parameteren λ:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots \\ |\psi_n\rangle &= |n\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2|n^{(2)}\rangle + \ldots \end{aligned}$$

Løsningen av det uperturberte problemet, $\widehat{H}_0|n\rangle = E_n^0|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forutsettes kjent, og det forutsettes at egenverdiene E_n^0 ikke er degenererte.

Vis at til første orden er egenverdiene gitt ved

$$E_n = E_n^0 + \lambda\langle n|\widehat{H}_1|n\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

e) For c nær 1 er potensialet i punkt b) nær et vanlig symmetrisk harmonisk-oscillator-potensial. Sett $c = 1 + \lambda$, og beregn $E_0(c)$ til første orden i λ.

Bruk det du har funnet i punktene b), c) og e) til å skissére $E_0(c)/(\hbar\omega)$ som funksjon av c.

Oppgave 2

a) En partikkel beveger seg i xy-planet. (Dette kan realiseres i en lagdelt halvleder.) Partikkelen er fri, bortsett fra at den påvirkes av et konstant magnetfelt $\mathcal{B}$ som står perpendikulært på planet som partikkelen beveger seg i. Bruk vektorpotensialet $\vec{A} = (-\mathcal{B}y, 0, 0)$ til å representere magnetfeltet.

Skriv ned den tidsuavhengige Schrödingerlikningen for partikkelens bølgefunksjon $\psi(x, y)$. Vis at det eksisterer felles egenfunksjoner for impulsoperatoren i x-retning, $\widehat{p}_x$, og Hamiltonoperatoren.

b) Skriv løsningene av den tidsuavhengige (stasjonære) Schrödingerlikningen på formen

$$\psi(x, y) = e^{ik_x x}\, \varphi(y),$$

og bestem energiegenverdiene (Landau-nivåene) E_n.

Oppgave 3

a) Gi en fysisk definisjon av det differensielle spredningstverrsnittet $d\sigma/d\Omega$ for elastisk spredning av partikler mot et fast spredende potensial.

b) Et elektron med masse m og impuls $\vec{p}$ spres på et atompotensial av formen

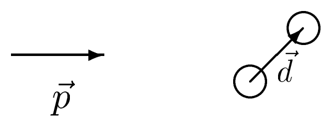
$$V_A(\vec{r}) = \frac{g}{r}\, e^{-r/a}, \tag{1}$$

der g og a er konstanter som angir henholdsvis styrken og rekkevidden av potensialet.

Beregn i Born-approksimasjonen det differensielle spredningstverrsnittet $d\sigma_A/d\Omega$, uttrykt ved $q = |\vec{q}|$, der elektronets impulsendring er $\hbar\vec{q}$.

c) Finn q, uttrykt ved elektronets impuls p og spredningsvinkelen ϑ.

d) Anta så at to atomer som hver for seg gir et potensial av typen (1) danner et molekyl, med avstandsvektor $\vec{d}$ mellom atomene (se figur). Det molekylære potensialet er da



$$V_M = V_A(\vec{r}) + V_A(\vec{r} - \vec{d}).$$

Vis at det differensielle tverrsnittet $d\sigma_M/d\Omega$ for elektronspredning på molekylet kan skrives

$$\frac{d\sigma_M}{d\Omega} = \left(2 + 2\cos(\vec{q}\cdot\vec{d})\right)\ \frac{d\sigma_A}{d\Omega},$$

der $d\sigma_A/d\Omega$ er tverrsnittet fra punkt b).

e) Anta tilslutt at elektronet spres mot en gass av toatomige molekyler der alle orienteringer av avstandsvektoren $\vec{d}$ er like sannsynlige. Beregn tverrsnittet midlet over alle molekyl-orienteringer,

$$\left\langle \frac{d\sigma_M}{d\Omega} \right\rangle.$$

Hva blir forholdet mellom dette tverrsnittet og det atomære tverrsnittet i de to grensetilfellene $qd \ll 1$ og $qd \gg 1$? Kommenter resultatene for disse to grensetilfellene.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Harmonisk oscillator

De to laveste energiegentilstandene har følgende energiverdier og posisjonsbølgefunksjoner:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \tfrac{1}{2}\hbar\omega & \langle q|0\rangle = \psi_0(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
E_1 &= \tfrac{3}{2}\hbar\omega & \langle q|1\rangle = \psi_1(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2x e^{-\frac{1}{2}x^2},
\end{aligned}
$$

der $x \equiv q\sqrt{m\omega/\hbar}$.

Uttrykt ved posisjons- og impuls-operatorene er senke- og heveoperatorene definert ved

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \\
a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p}
\end{aligned}
$$

Disse stigeoperatorene har egenskapene

$$
\begin{aligned}
a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle,
\end{aligned}
$$

der $|n\rangle$ er egentilstand nr. n. All tidsavhengighet er neglisjert.

Born-approksimasjonen

I Born-approksimasjonen er spredningsamplituden gitt ved

$$
f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, d^3r,
$$

integrert over hele rommet. Her er $\hbar\vec{q}$ partikkelens impulsendring.

Partikkel i elektromagnetisk felt

En partikkel med masse m og ladning q som befinner seg i elektromagnetiske felt beskrevet ved vektorpotensial $\vec{A}(\vec{r},t)$ og skalart potensial $\varphi(\vec{r},t)$ har Hamiltonoperatoren

$$
\widehat{H} = \frac{[\widehat{\vec{p}} - q\vec{A}]^2}{2m} + q\varphi.
$$