Eksamen i SIF4045 Kvantemekanikk 29.05.01
Løsningskisse

Oppgave 1

I elektronorbital $|\ell, m, m_s\rangle$ der spinntilstanden $m_s = \pm\frac{1}{2}$ er inkludert, har $\widehat{H}'$ egenverdi ΔE,

$$\widehat{H}'|\ell, m, m_s\rangle = \Delta E|\ell, m, m_s\rangle,$$

med

$$\Delta E = \frac{e}{2m_e}\mathcal{B}\hbar(m + 2m_s).$$

For $\ell = 1$ tar m verdiene -1, 0 og 1, og m_s tar verdiene $\pm\frac{1}{2}$. Da tar tilleggs-energien følgende 5 verdier:

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m_e}\mathcal{B}k, \text{ med } k = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Så hvert p-nivå splittes opp i 5 nivåer.

Oppgave 2

a) Som læreboka

b) Ut fra definisjonene på stigeoperatorene har vi

$$\widehat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger).$$

Det gir

$$\widehat{q}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a + a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a + a^\dagger)|1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(|0\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle\Big). \qquad (1)$$

Vi har brukt $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, $a|1\rangle = |0\rangle$ og $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$. Ved å ta skalarproduktet med $\langle 0|$ får vi da egentilstandene er ortonormerte (dvs $\langle 0|0\rangle = 1$ og $\langle 0|2\rangle = 0$):

$$\langle 0|\widehat{q}^2|0\rangle = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2m\omega}}}.$$

For fjerdepotensen kan vi gjøre det på samme vis. Det er enklere å ta normen av $\widehat{q}^2|0\rangle$ vha uttrykket (1):

$$\langle 0|\widehat{q}^4|0\rangle = \langle 0|\widehat{q}^2 \cdot \widehat{q}^2|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(\left(\langle 0| + \sqrt{2}\,\langle 2|\right) \cdot \left(|0\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle\right)\right) = (1+2)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2$$

Et tredje alternativ er å bruke fullstendighetsrelasjonen $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ til å skrive

$$\langle 0|\widehat{q}^4|0\rangle = \sum_n \langle 0|\widehat{q}^2|n\rangle\langle n|q^2|0\rangle = \sum_n |\langle n|\widehat{q}^2|0\rangle|^2 = |\langle 0|\widehat{q}^2|0\rangle|^2 + |\langle 2|\widehat{q}^2|0\rangle|^2.$$

Vha (1) blir dette

$$\langle 0|\hat{q}^4|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (1+2) = \underline{\underline{\frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}}},$$

qed.
c) Den stasjonære Schrödingerlikning blir i denne tilnærmelsen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}m\frac{g}{R}\,q^2\psi = E\psi,$$

som er harmonisk-oscillator-likningen med $\omega^2 = g/R$. Grunntilstanden er derfor

$$E_0^0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\hbar\sqrt{g/R}}}. \tag{2}$$

d) Perturbasjonsleddet $mgRq^4/(24R^4)$ gir følgende tilleggsenergi i førsteordens perturbasjonsteori:

$$-\frac{mgR}{24R^4}\langle 0|q^4|0\rangle = -\frac{mg}{24R^3}\frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

vha resultatet i punkt b). Ved å sette inn $\omega^2 = g/R$ og ta med nullte-ordens-resultatet (2) fås grunntilstandsenergien

$$E_0 = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} - \frac{\hbar^2}{32mR^2}}}.$$

e) Uten tyngdefelt er Schrödingerlikningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dq^2} = E\psi,$$

med løsning

$$\psi(q) = \text{konstant } e^{ikq}, \text{ der } E = \hbar^2 k^2/2m.$$

Betingelsen $\psi(q + 2\pi R) = \psi(q)$ gir

$$e^{2\pi Rki} = 1 \text{ dvs } kR = n = \text{ heltall.}$$

Innsetting av $k = n/R$ i $E = \hbar^2 k^2/2m$ gir energiene

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\,n^2.$$

Egenfunksjonene blir, etter normering,

$$\psi_n^0(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,e^{inq/R}.$$

Alle energinivåene har degenerasjonsgrad 2 (fordi $\pm n$ gir samme energi), unntatt grunntilstanden $n = 0$ som ikke er degenerert.

f) Så gjør vi perturbasjonsteori med V_g som perturbasjon, og bruker uttrykkene fra punkt b). Bølgefunksjonen i grunntilstanden er

$$\psi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}.$$

Førsteordensbidraget til grunntilstandsenergien er

$$E_0^{[1]} = \langle 0|V_g|0\rangle = \int_0^{2\pi R} |\psi_0^0|^2 V_g dq = \frac{1}{2\pi R} mgR \int_0^{2\pi R} [1 - \cos(q/R)]\, dq = mgR,$$

da integralet over cosinusfunksjonen gir null.

I annen ordens perturbasjonsteori trenger vi for $s \neq 0$ matriseelementet

$$\langle s|V_g|0\rangle = \int_0^{2\pi R} \psi_s^{0*} V_g \psi_0^0\, dq = \frac{mgR}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} e^{-isq/R}[1 - \cos(q/R)]\, dq$$

Integralet med 1-tallet gir (for $s \neq 0$) null pga ortogonalitet. Ved å uttrykke cosinus på eksponensiell form får vi

$$\langle s|V_g|0\rangle = -\frac{mgR}{4\pi R} \int_0^{2\pi R} e^{-isq/R} \left(e^{iq/R} + e^{-iq/R}\right)\, dq = \frac{mgR}{2} \left(\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}\right).$$

Vi får derfor bare to ledd i uttrykket for annenordens perturbasjonsbidrag, og disse to leddene er like store:

$$E_0^{(2)} = \sum_{s(\neq 0)} \frac{|\langle s|V_g|0\rangle|^2}{E_0^0 - E_s^0} = -2\frac{(mgR/2)^2}{\hbar^2/(2mR^2)} = -\frac{m^3 R^4 g^2}{\hbar^2}.$$

Da nullte-ordens bidraget er 0, får vi alt i alt for svake felt:

$$E_0 = \underline{\underline{mgR - \frac{m^3 R^4 g^2}{\hbar^2}}} + \mathcal{O}(\}^\ni).$$

g)

Den dimensjonsløse grunntilstandsenergien er iflg. ovenstående

$$\widetilde{E}_0 = \frac{E_0}{mgR} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\widetilde{g} & \text{for } \widetilde{g} \ll 1 \text{ (svake felt)}\ . \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{g}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}\widetilde{g}^{-1}, & \text{for } \widetilde{g} \gg 1 \text{ (sterke felt)}. \end{cases}$$

der

$$\widetilde{g} = \frac{mgR}{\hbar^2/(2mR^2)}.$$

Vi ser at $\widetilde{E}_0$ er lik 1 for $\widetilde{g} = 0$, og avtar når $\widetilde{g}$ øker, først lineært. For store verdier av $\widetilde{g}$ går $\widetilde{E}_0$ mot null som $1/\sqrt{2\widetilde{g}}$.
Skisse:

h) Da V_e er en ulike funksjon av q, mens grunntilstanden er en symmetrisk funksjon av q vil førsteordens perturbasjonsledd være null. Annenordensbidraget er ikke null. Derfor er $b = \underline{\underline{2}}$.

i) Den stasjonære Schrödingerlikningen blir i den angitte tilnærmelsen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(Q) + \frac{1}{2}\frac{e\mathcal{E}}{R}\,Q^2\psi = (E + e\mathcal{E}R)\,\psi.$$

Dette er igjen harmonisk-oscillator-likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(Q) + \frac{1}{2}m\omega^2\,Q^2\psi = \epsilon\psi$$

dersom vi gjør identifikasjonene

$$\omega^2 = \frac{e\mathcal{E}}{mR}$$

og

$$\epsilon = E + e\mathcal{E}R.$$

Grunntilstandsenergien for oscillatoren er $\epsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega$, som gir

$$E_0 = -e\mathcal{E}R + \frac{1}{2}\hbar\omega = \underline{\underline{-e\mathcal{E}R + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{e\mathcal{E}}{mR}}}}.$$

Oppgave 3

Betingelsen for kvantetallet for totalspinnet er

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2,$$

dvs $j = j_1 + j_2$, $j = j_1 + j_2 - 1$, osv så lenge ovenstående ulikhet er respektert.

Med $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ blir $0 \leq j \leq 1$. Mesoner kan derfor ha spinnverdiene 0 eller 1.

Systemet av to kvarker kan altså ha spinn 0 eller 1. Når dette koples med en tredje kvark med spinn $\frac{1}{2}$ får vi to muligheter for totalspinnet, enten $1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ eller $1-\frac{1}{2} = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Baryoner i grunntilstanden kan altså ha spinnverdiene $\frac{3}{2}$ eller $\frac{1}{2}$.

Oppgave 4

a) Med innfallende partikkelstrøm j_{inn} og romvinkelelementet $d\Omega$ er det differensielle spredningstverrsnittet definert ved

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{antall partikler spredt inn i } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{d\Omega \;\; j_{inn}}.$$

b) Partikler med impuls $\hbar k$ som faller inn på potensialet vil bare spres om dreieimpulsen mhp spredningssentret er mindre enn $\hbar ka$ (støtparameter mindre enn a). Dreieimpulsens kvadrat mindre enn $\hbar^2 k^2 a^2$ vil si $\ell(\ell+1) < k^2 a^2$. Da $\ell^2 \leq \ell(\ell+1) < (\ell+\frac{1}{2})^2$ vil det med god tilnærmelse si

$$\ell \leq ka.$$

For lave energien (små k) vil derfor bare $\ell = 0$ bidra. Siden $P_0 = 1$ vil spredningen være isotrop (vinkeluavhengig) ved lave energier.