

NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
 INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen i Emne SIF 4060: Elektromagnetisk teori

Lørdag 8. desember, 2001

kl. 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: C - Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Se også oppgitte formler side 5-8.

Oppgave 1

For en rektangulær bølgeleder med sidekanter a og b er løsningene for TE_{mn} modene gitt ved

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b),$$

hvor B_0 er en konstant. Disse oppfyller

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + [(\omega/c)^2 - k^2] B_z = 0,$$

hvor k er bølgetallet i z retning, dvs. i bølgelederens lengderetning.

- a) Bestem dispersjonsrelasjonen (k som funksjon av ω) for disse modene, og vis at den kan uttrykkes som

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}.$$

Finn frekvensen ω_{mn} uttrykt ved a , b , m og n .

Hvilken betydning har frekvensen ω_{mn} ?

b) Finn fasehastighet og gruppehastighet for modene.

c) Vis at med

$$\cos \theta = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$

kan resultatene i b) forklares ved at vi har en superposisjon av plane bølger som forplantes under en vinkel θ med z akse.

d) Bølgelederens dimensjoner er $a = 2.28$ cm og $b = 1.01$ cm.

Hvilke TE_{mn} moder kan forplantes når frekvensen er $1.70 \cdot 10^{10}$ Hz ?

Hvilket frekvensområde må velges dersom bare én mode skal kunne forplantes?

Oppgave 2

a) I elektrostatikk er det elektriske feltet bare gitt av skalarpotensialet V . Vi antar at feltet skyldes en ladningsfordeling $\rho(\mathbf{r})$ i fritt rom (vakuum).

Hvilke differensialligninger oppfyller \mathbf{E} og V ? Skriv dem ned.

Bestem elektrisk felt \mathbf{E} og ladningsfordelingen ρ når potensialet er gitt som:

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & ; \text{for } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} [3 - (r/R)^2] & ; \text{for } r \leq R. \end{cases}$$

b) Det forutsettes kjent at

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \rho(\mathbf{r}') d\tau'; \text{ hvor } r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

og at

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^m P_m(\cos \theta'),$$

hvor de første Legendrepolyomene er: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, ..osv., og θ' er vinkelen mellom vektorene \mathbf{r} og \mathbf{r}' .

Vis hvordan potensialet fra ladningsfordelingen $\rho(\mathbf{r})$ kan representeres ved en multipolutvikling.

Skriv opp uttrykk for monopol- og dipolleddene.

- c) Vis at dipolledet kan uttrykkes som:

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \text{ hvor } \mathbf{p} \text{ er dipolmomentet.}$$

Anta at dipolmomentet \mathbf{p} er rettet langs z akse. Innfør kulekoordinater og beregn komponentene E_r , E_θ og E_ϕ av det elektriske dipolfeltet.

Vis at dipolfeltet kan skrives i koordinatfri form som:

$$\mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}].$$

- d) Forklar hvordan man kan bruke speilingsmetoden til å løse elektrostatiske problemer.

En punktladning q er plassert på z akse i avstand a over et uendelig stort, ledende plan i $z = 0$.

Beregn potensialet og det elektriske feltet for avstander $r \gg a$ i halvrommet $z \geq 0$.

Oppgave 3

- a) Ta utgangspunkt i Maxwells ligninger på differensiell form (se oppgitte formeler) og skriv ned, eller utled, de tilhørende ligningene på integralform.

Hvilke grensebetingelser tilfredsstiller \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} og \mathbf{H} ved grenseflaten mellom to materialer uten frie ladninger?

- b) Vis at man ved å innføre skalarpotensialet V og vektorpotensialet \mathbf{A} får to av Maxwells ligninger automatisk tilfredsstilt.

I stor avstand fra en dipol med tidsavhengig dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ er potensialene gitt ved:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t-r/c) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 cr} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{4\pi r}, \quad \text{hvor} \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}.$$

Beregn elektrisk felt i bølgesonen, dvs. for så store r at vi kan se bort fra bidrag som går mot null raskere enn $1/r$ når $r \rightarrow \infty$.

- c) Vis at resultatet i b) kan skrives som: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c))]$.

Finn det tilsvarende uttrykket for magnetfeltet $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

- d) Beregn Poyntings vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ og totalt utstrålt effekt fra dipolen i c).

Oppgitt: Side 5-8: formelene foran og bak i læreboka.