Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Lørdag 26. mai 2001

Oppgavesettet gitt av Kåre Olaussen.

Dette løsningsforslaget er på 8 sider.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved modellen definert ved (Klein-Gordon) Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - \lambda (\varphi^* \varphi)^n , \tag{1}$$

der $\lambda > 0$ og $n > 1$.

a) Skriv ned, eller utled, feltligningene for denne modellen.

Euler-Lagrange ligningene er på generell form

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \tag{2}$$

I dette tilfellet får vi, for henholdsvis $\varphi^a = \varphi^*$ og $\varphi^a = \varphi$,

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + n\lambda (\varphi^* \varphi)^{n-1} \varphi = 0, \tag{3}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + n\lambda (\varphi^* \varphi)^{n-1} \varphi^* = 0. \tag{4}$$

Kommentar: En fallgrube her (og i en tilsvarende utregning av Nötherstrømmer) er at man setter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \partial_\mu \varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} = \partial_\mu \varphi *, \quad \textbf{NB! Feil!}$$

istedet for

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \partial_\mu \varphi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} = \partial_\mu \varphi.$$

b) Anta en løsning av formen $\varphi(x) = A\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$, der A er en positiv, reell konstant.

Finn sammenhengen mellom ω og A.

Vi setter den foreslåtte løsningen inn i (3) og finner, siden $\partial_0 = \frac{\partial}{c\,\partial t}$,

$$\left[-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + n\lambda A^{2n-2} \right] A\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = 0,$$

med løsning

$$\omega = c\sqrt{n\lambda}\,A^{n-1}. \tag{5}$$

Kommentar: Det er mange ekvivalente måter å skrive denne sammenhengen på, men (i) det må ikke være noen gjenværende tidsavhengighet i denne sammenhengen (for da har man ikke vist eksistens av løsning) og (ii) en imaginær ω bør få alle varsellamper til å blinke!

c) Lagrangetettheten (1) er invariant under fasetransformasjoner

$$\varphi(x) \to \mathrm{e}^{-i\epsilon}\,\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \to \mathrm{e}^{i\epsilon}\,\varphi^*(x). \tag{6}$$

Skriv ned, eller utled, den konserverte strømmen, j^μ, som opptrer som konsekvens av denne kontinuerlige symmetrien.

I dette tilfellet har vi $\Delta\varphi = -i\varphi$, $\Delta\varphi^* = i\varphi^*$ og $\Delta\mathcal{L} = 0$, så vi får

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi^*\right)}\Delta\varphi^* = -i\left(\partial^\mu\varphi^*\,\varphi - \varphi^*\partial^\mu\varphi\right). \tag{7}$$

d) Vi definerer en antallstetthet $\rho \equiv \frac{1}{\hbar c} j^0$. Finn, for løsningen fra punkt **b)**, sammenhengen mellom ρ og A.

Ved bruk av overstående fås

$$\rho = \frac{2}{\hbar c}\frac{\omega}{c}A^2 = \frac{2}{\hbar c}\sqrt{n\lambda}A^{n+1}. \tag{8}$$

Kommentar: Prefaktoren $\frac{1}{\hbar c}$ i definisjonen av ρ kan virke umotivert (det var, fornuftig nok, ingen som hadde bekymret seg over dette på eksamen). Den er tatt med for å at ρ skal bli dimensjonsmessig korrekt for en antallstetthet, $[\rho] = \mathrm{m}^{-3}$. Vi kan se dette av følgende analyse (som ikke var forventet av kandidatene):

For at virkningen $S = \int dt\, d^3r\, \mathcal{L}$ skal få riktig dimensjon, $[S] = \mathrm{kg\ m^2/s}$, må dimensjonen til φ-feltet tilfredstille $[\varphi]^2 = \mathrm{kg\,m/s^2}$ (som vi finner ut ved å se på $\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi$-leddet i $\mathcal{L}$). Da blir $\left[j^0\right] = \mathrm{m}^{-1}\ [\varphi]^2 = \mathrm{kg/s^2}$, så vi må dele med en størrelse som har dimensjon $\mathrm{kg\,m^3/s^2}$ for å få et dimensjonsmessig riktig uttrykk. Kombinasjonen $\hbar c$ oppfyller denne betingelsen.

e) Virkningen $S = \frac{1}{c}\int d^4x\,\mathcal{L}$ definert fra Lagrangetettheten (1) er invariant under translasjoner i tid og rom,

$$\varphi(x) \to \varphi(x + \epsilon e_{(\nu)}), \quad \varphi^*(x) \to \varphi^*(x + \epsilon e_{(\nu)}), \tag{9}$$

der $e_{(\nu)}$ er en enhetsvektor i ν-retningen, $e^\mu_{(\nu)} = \eta^\mu{}_\nu$.

Skriv ned, eller utled, den konserverte tensoren, $T^\mu{}_\nu$, som opptrer som konsekvens av disse kontinuerlige symmetriene.

I dette tilfellet har vi

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= e^\mu_{(\nu)}\partial_\mu\varphi = \partial_\nu\varphi, \\
\Delta\varphi^* &= e^\mu_{(\nu)}\partial_\mu\varphi^* = \partial_\nu\varphi^*, \\
\Delta\mathcal{L} &= e^\mu_{(\nu)}\partial_\mu\mathcal{L} = \partial_\mu\eta^\mu_\nu\mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Vi finner en konservert strøm for hver indeks ν. Tilsammen danner de *energi-impuls tensoren*

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial^\nu\varphi - \eta^\mu_\nu\,\mathcal{L}, \tag{10}$$

med $\mathcal{L}$ er gitt av ligning (1). **Kommentar:** Skuffende mange får problemer her; det straffer seg også på de neste punktene. Men energi-impuls tensoren er et av de mest sentrale begrepene i feltteori, så det er ikke urimelig at man skal få til noe å jobbe videre med her (selv om det ikke nødvendigvis er helt riktig).

f) Trykket p i systemet er gitt ved

$$p = -\frac{1}{3} T^i_i. \tag{11}$$

Finn, for løsningen fra punkt **b)**, *tilstandsligningen* (sammenhengen mellom p og ρ).

I dette tilfellet avhenger ikke feltene av posisjonen, så vi har $T^i_j = -\eta^i_j \mathcal{L} = -\delta^i_j \mathcal{L}$, dvs at trykket er lik Lagrangetettheten

$$p = \frac{1}{3}\delta^i_i \mathcal{L} = \mathcal{L} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi^* \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^n = (n-1)\,\lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^n = (n-1)\,\lambda A^{2n}.$$

Vi eliminerer A til fordel for tettheten ρ, og finner en tilstandsligning

$$p = (n-1)\,\lambda \left(\frac{\hbar c}{2\sqrt{n\lambda}}\right)^{2n/(n+1)} \rho^{2n/(n+1)}. \tag{12}$$

Kommentar: Ligning (12) regnes her som fullgodt svar. Men for praktisk bruk vil det være mer hensiktsmessig å formulere den på en dimensjonsmessig mer opplagt form, nemlig

$$p = k_B T_0 \left(\rho a^3\right)^\eta \rho, \tag{13}$$

der $\eta = (n-1)\,/\,(n+1)$, a er en karakteristisk lengde for modellen (slik at ρa^3 blir dimensjonsløs) og $k_B T_0$ er en karakteristisk energi for modellen. Størrelsene a og $k_B T_0$ må konstrueres fra $\hbar$, c og λ. Et mulig valg er

$$a = \left(\lambda \left(\hbar c\right)^{n-1}\right)^{1/(2n-4)}, \tag{14}$$

$$k_B T_0 = (n-1)\,(4n)^{n/(n+1)}\,\frac{\hbar c}{a}. \tag{15}$$

For å verifisere at disse størrelsene er dimensjonsmessig korrekte observerer vi at $\left[\lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^{n-1}\right] = \left[\partial_\mu \partial^\mu\right] = \mathrm{m}^{-2}$, dvs. at $[\lambda] = \frac{1}{\mathrm{m}^2}\left(\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kgm}}\right)^{n-1}$ og derfor at $\left[\lambda \left(\hbar c\right)^{n-1}\right] = \mathrm{m}^{(2n-4)}$. Merk at dette ikke fungerer når $n = 2$. I dette tilfellet har ikke modellen noen naturlig tilordnet lengde — den er *skalainvariant*.

g) Energitettheten u i systemet er gitt ved

$$u = T^0_0. \tag{16}$$

Finn, for løsningen fra punkt **b)**, sammenhengen mellom energitetthet u og trykk p.

Vi finner

$$u = T^0_0 = 2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi^* \varphi - \eta^0_0 \mathcal{L} = (n+1)\,\lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^n = \frac{n+1}{n-1}\,p. \tag{17}$$

Kommentar: Alternativt (hvis man ikke har funnet uttrykket for $T^\mu{}_\nu$) kan man her benytte det faktum at T^0_0 er lik Hamiltontettheten,

$$T^0_0 = \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*}\,\dot{\varphi}^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\,\dot{\varphi} - \mathcal{L}.$$

Merk forøvrig at vi får $u = 3p$ når $n = 2$ (skala-invariant teori); den samme relasjonen gjelder for elektromagnetiske felter. Dette betyr at energi-impuls tensoren er sporløs, $T^\mu{}_\mu = 0$, en karakteristisk egenskap for skalainvariante modeller.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du studere bevegelse av punktpartikler i et statisk, rotasjonssymmetrisk rom med linjeelement

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2\left(\sin^2\vartheta d\vartheta^2 + d\varphi^2\right). \tag{18}$$

Bevegelsesligningene kan utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{19}$$

der τ er (proposjonal med) egentiden.

a) Anta at bevegelsen skjer i ekvator-planet, $\vartheta = \pi/2$, og utled bevegelsesligningene for $t(\tau)$, $r(\tau)$ og $\varphi(\tau)$.

Det eksplisitte uttrykket for Lagrangefunksjonen blir (når $\dot\vartheta = 0$)

$$L = \frac{1}{2}\left(A(r)c^2\,\dot t^2 - B(r)\,\dot r^2 - r^2\,\dot\varphi^2\right). \tag{20}$$

Merk at denne Lagrangefunksjonen egentlig må multipliseres med en uttrykk med dimensjon kg (f. eks. massen m til partikkelen) for at virkningen skal bli dimensjonsmessig korrekt. Men dette er uten betydning for bevegelsesligningene, som har formen

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu},$$

for x^μ henholdsvis r, t og φ, der $\dot x^\mu = dx^\mu/d\tau$. For Lagrangefunksjonen (20) gir dette

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}B(r)\,\dot r &= \frac{1}{2}A'(r)c^2\,\dot t^2 - \frac{1}{2}B'(r)\,\dot r^2 - r\,\dot\varphi^2, && (21)\\ \frac{d}{d\tau}A(r)c^2\,\dot t &= 0, && (22)\\ -\frac{d}{d\tau}r^2\,\dot\varphi &= 0\,, && (23) \end{aligned}$$

der $'$ betyr derivasjon med hensyn på r.

Kommentar: Dette er et tilfelle der mere arbeid ikke nødvendigvis er bedre. Det har ingen hensikt å utføre τ-derivasjonene på venstre side av (21–23); det fører bare til mindre gjennomskuelige uttrykk. Spesielt (22) og (23) viser jo meget eksplisitt at $A(r)c^2\,\dot t$ og $r^2\,\dot\varphi$ er konserverte størrelser.

b) Lagrangefunksjonen (19) er invariant under transformasjonene

$$t \to t + \epsilon, \quad \varphi \to \varphi + \epsilon.$$

Hvilke konserverte størrelser kan utledes fra disse kontinuerlige symmetriene? Kall de tilhørende bevegelseskonstantene for henholdsvis K_t og K_φ. Verifiser også konserveringslovene direkte fra bevegelsesligningene du fant i forrige punkt.

Vi har henholdsvis $\Delta t = 1$ og $\Delta\varphi = 1$, så konserveringslovene blir

$$K_t = \frac{\partial L}{\partial \dot t} = A(r)c^2\,\dot t \tag{24}$$

$$K_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -r^2\,\dot\varphi \tag{25}$$

Vi observerer at ligning (22,23) nettopp har formen $\frac{d}{d\tau}K_t = 0$, $\frac{d}{d\tau}K_\varphi = 0$.

Kommentar: Mange oppdager at vi har henholdsvis tidstranslasjons symmetri og rotasjonssymmetri, slik at de konserverte størrelsene må være (proprosjonale med) energi og dreieimpuls, men glemmer helt å gjøre rutinemessig bruk av Nöthers teorem. Noen finner konserveringslover ekvivalente med at $\dot{t}$ og $\dot{\varphi}$ er konstante. Dette er generelt ikke korrekt, men det blir riktig når man spesialiserer til sirkulær bevegelse som i de siste deloppgavene.

c) Anta nå at bevegelsen er en rent sirkulær, med radius r. Vis at dette setter en betingelse på forholdet mellom K_φ og K_t, av formen

$$\left(\frac{K_\varphi}{K_t}\right)^2 = F(r), \tag{26}$$

og bestem $F(r)$ uttrykt ved størrelser fra ligning (18).

Vi kan bruke konserveringslovene (24,25) til å eliminere $\dot{t}$ og $\dot{\varphi}$. Innsatt i ligning (21) gir dette

$$\frac{d}{d\tau}B(r)c^2\,\dot{r} = \frac{1}{2}\,\frac{A'(r)}{A(r)^2c^2}\,K_t^2 - \frac{1}{2}B'(r)\,\dot{r}^2 - \frac{1}{r^3}\,K_\varphi^2. \tag{27}$$

For en sirkelbevegelse er $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, så ligningen over reduserer seg til

$$\frac{1}{2}\,\frac{A'(r)}{A(r)^2c^2}\,K_t^2 - \frac{1}{r^3}\,K_\varphi^2 = 0,$$

med løsning

$$\left(\frac{K_t}{K_\varphi}\right)^2 = \frac{2A(r)^2c^2}{r^3A'(r)} \tag{28}$$

Ved å ta kvadratroten av dette uttrykket fås to mulige fortegn; disse svarer til to mulige retninger for rotasjonen.

d) Målt i koordinat-tiden t har partikkelen en hastighet $v = r\dfrac{d\varphi}{dt}$.

Bestem hvordan v må avhenge av r for en sirkelbevegelse, og skriv ut dette mer eksplisitt for Schwarzschild-metrikken,

$$A(r) = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right), \qquad B(r) = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right)^{-1}, \quad R_M = \frac{2MG}{c^2}. \tag{29}$$

Hastigheten (for en ren sirkelbevegelse) blir

$$v = r\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{(d\varphi/d\tau)}{(dt/d\tau)} = \frac{A(r)c^2}{r^2}\,\frac{K_\varphi}{K_t} = \sqrt{\frac{rA'(r)}{2}}\,c. \tag{30}$$

Innsatt for Schwarzschild-metrikken gir dette

$$v = \sqrt{\frac{R_M}{2r}}\,c = \sqrt{\frac{MG}{r}}, \tag{31}$$

nøyaktig det samme uttrykket som for ikke-relativistisk bevegelse i svakt gravitasjonsfelt (og i overensstemmelse med Keplers tredje lov).

e) En observatør som er i ro ved radius r måler partikkelens hastighet til $v_r = r\dfrac{d\varphi}{dt_r}$, der t_r er tiden målt med lokal klokke (altså egentiden til observatøren).

Bestem hvordan v_r må avhenge av r for en sirkelbevegelse i Schwarzschild-metrikken.

Vi må finne sammenhengen mellom t_r og t. Fra linjeelementet (18) følger det at

$$ds^2 = c^2 dt_r^2 = A(r)c^2\, dt^2 \tag{32}$$

siden $dr = d\varphi = d\vartheta = 0$ langs verdenslinjen til en observatør i ro. Altså er $dt/dt_r = A(r)^{-1/2}$, så vi får i Schwarzschild-metrikken

$$v_r = \frac{dt}{dt_r}\, v = \sqrt{\frac{r}{r - R_M}}\, v = \sqrt{\frac{R_M}{2r - 2R_M}}\, c. \tag{33}$$

Kommentar: Merk at denne deloppgaven er uavhengig av de øvrige; den er bare et (lett forkledd) spørsmål om beregning av egentid langs en spesifisert verdenslinje.

f) Ved hvilken radius vil *lyset* kunne gå i sirkelbane i Schwarzschild-metrikken?

Den lokale observatøren vil observere lyshastigheten korrekt, så lyset går i sirkelbane når $v_r = c$, dvs. når $R_M/(2r - 2R_M) = 1$. Altså når

$$r = \frac{3}{2} R_M. \tag{34}$$

Alternativt (for dem som ikke stoler på at den lokale observatøren måler lyshastigheten riktig) kan man bruke at $ds^2 = 0$ langs lyskurver. Sirkulære lyskurver må derfor oppfylle betingelsen $A(r)c^2\, \dot{t}^2 = r^2\, \dot{\varphi}^2$. Eliminasjon av $\dot{t}$ og $\dot{\varphi}$ til fordel for K_t og K_φ gir betingelsen

$$\left(\frac{K_t}{K_\varphi}\right)^2 = \frac{A(r)c^2}{r^2},$$

som må være oppfylt sammen med ligning (28). Løsningen for Schwarzschild-metrikken er som før gitt ved ligning (34), så mistroen til den lokale observatøren er helt ubegrunnet.

Kommentarer: Her forslo alle (som foreslo noe) løsningen $r = R_M$, men den er altså ikke riktig.

Avslutningsvis kan det være grunn til å kommentere oppgavetekstens formulering om at "τ er (proporsjonal med) egentiden". Innsatt for en sirkelbevegelse finner vi sammenhengen

$$d^2 s = \left(\frac{K_t^2}{A(r)c^2} - \frac{K_\varphi^2}{r^2}\right) d^2\tau = \left(\frac{2A(r)}{rA'(r)} - 1\right) \frac{K_\varphi^2}{r^2}\, d^2\tau = \left(\frac{2r - 3R_M}{r^2 R_M}\right) K_\varphi^2\, d^2\tau. \tag{35}$$

Her har vi i siste overgang satt inn for Schwarzschild-metrikken. Sålenge $2r > 3R_M$ kan vi alltid *velge* K_φ^2 slik at $d^2 s = c^2\, d^2\tau$, så da blir τ *lik* egentiden. Men for lysbaner er jo $d^2 s = 0$, så da er det ikke særlig praktisk å pålegge en slik identitet.

Merk at hvis vi pålegger $d^2 s = c^2\, d^2\tau$ så blir

$$K_\varphi = r\sqrt{\frac{R_M}{2r - 3R_M}}\, c = \frac{r\, v_r}{\sqrt{1 - (v_r/c)^2}}, \tag{36}$$

$$K_t = \sqrt{1 - \frac{R_M}{r}}\, \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v_r/c)^2}}. \tag{37}$$

Vi gjenkjenner (36) som det relativistiske uttrykket for dreieimpuls pr. masseenhet, mens den mindre gjenkjennbare ligningen (37) ser ut til å være det relativistiske energiuttrykket pr. masseenhet (inkludert gravitasjonsenergien). I den ikke-relativistiske, svak felt grensen reduserer K_t seg til et velkjent uttrykk,

$$K_t = c^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{G}{r} + \mathcal{O}(c^{-2})$$

Den relativistiske svak felt grensen av (37) forteller oss at også den kinetiske energien kobler til gravitasjon, og derfor bidrar til gravitasjonspotensialet.

Oppgave 3

I denne oppgave skal du se på noen aspekter av Einstein's gravitasjonsligninger i "svak felt" grensen. Dette vil si at man utvikler den metriske tensoren som

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{38}$$

og bare regner til første orden i den symmetriske tensoren h (og dens deriverte).

I denne oppgaven merker vi oss at alle størrelsene som skal beregnes avhenger av minst en gangs deriverte av metrikken, dvs. deriverte av tensoren h. Dette betyr at vi "bruker opp" en orden av h til dette, og dermed kan sette $g = \eta$ når indekser skal heves eller senkes. For selve utregningen bruker vi de vedlagte generelle uttrykkene, med de forenklingene som kan gjøres fordi vi bare skal regne til første orden i h.

a) Beregn konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}$ til første orden i h.

$${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}\left(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}\right). \tag{39}$$

b) Beregn Riemanntensoren $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ til første orden i h.

Siden Γ er av første orden i h tar vi ikke med $\Gamma\,\Gamma$-bidragene til R:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma}\right). \tag{40}$$

Kommentar: Siden h er en symmetrisk tensor, og derivasjonsrekkefølgen ikke spiller rolle, er det lett å verifisere at (40) oppfyller symmetriene

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta},$$

og (med litt mere arbeid) at

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0.$$

c) Vis at et felt av formen

$$h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\Lambda_\nu(x) + \partial_\nu\Lambda_\mu(x), \tag{41}$$

der $\Lambda_\mu(x)$ er et vilkårlig to ganger deriverbart vektorfelt, ikke gir noe bidrag til Riemanntensoren.

Vi setter ligning (41) inn i (40) og får åtte ledd

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\alpha,\delta\beta\gamma} - \Lambda_{\alpha,\gamma\beta\delta} + \Lambda_{\beta,\gamma\alpha\delta} - \Lambda_{\beta,\delta\alpha\gamma} + \Lambda_{\gamma,\beta\alpha\delta} - \Lambda_{\gamma,\alpha\beta\delta} + \Lambda_{\delta,\alpha\beta\gamma} - \Lambda_{\delta,\beta\alpha\gamma}\right).$$

Disse kansellerer fordi derivasjonsrekkefølgen ikke spiller rolle.

d) Beregn Riccitensoren $R_{\beta\delta}$ til første orden i h.

$$R_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left({h^\alpha}_{\delta,\alpha\beta} + {h^\alpha}_{\beta,\alpha\delta} - {h^\alpha}_{\alpha,\beta\delta} - {h_{\beta\delta,}}^{\alpha}{}_{\alpha}\right). \tag{42}$$

e) Anta at $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ (vi kan alltid oppnå en slik situasjon ved "gauge" transformasjonen, $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\Lambda_\nu + \partial_\nu\Lambda_\mu$, for passende Λ_μ).

Beregn i dette tilfellet Einsteintensoren $G_{\beta\delta}$ til første orden i h.

Med betingelsen $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ forenkles Riccitensoren til

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2}\left({h^\alpha}_{\alpha,\beta\delta} + {h_{\beta\delta,}}^{\alpha}{}_{\alpha}\right),$$

så skalar krumning blir

$$R = -h^{\alpha}{}_{\alpha,}{}^{\beta}{}_{\beta} = -\Box h^{\alpha}{}_{\alpha}\,.$$

Einsteintensoren kan da skrives

$$G_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left(\Box\,\eta_{\beta\delta} - \partial_\beta\partial_\delta\right) h^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\Box h_{\beta\delta}\,. \tag{43}$$

f) Vis at konserveringsloven $\partial^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$ alltid er oppfylt for det uttrykket du fant i forrige punkt.

Vi finner

$$\partial^\alpha G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial^\alpha\left(\Box\,\eta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta\right) h^{\gamma}{}_{\gamma} - \frac{1}{2}\Box\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0, \tag{44}$$

fordi $\partial^\alpha\left(\Box\,\eta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta\right) = \Box\partial_\beta - \Box\partial_\beta = 0$, og fordi vi har pålagt betingelsen $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$.

Kommentarer: Her kom (selvsagt!) alle som prøvde seg fram til svaret 0, men ikke alle helt uten å svindle med indekser.

Hvis vi ikke pålegger betingelsen $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$ finner vi ved litt mere regning

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \mathcal{K}^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \partial^\beta\partial^\gamma\eta^{\alpha\delta} - \partial^\gamma\partial^\delta\eta^{\alpha\beta}\right) h_{\gamma\delta}, \tag{45}$$

der $\mathcal{K}^{\alpha\beta} = \Box\eta^{\alpha\beta} - \partial^\alpha\partial^\beta$. Fordi $\partial_\alpha\mathcal{K}^{\alpha\beta} = 0$, og

$$\partial_\alpha\left(\partial^\beta\partial^\gamma\eta^{\alpha\delta} - \partial^\gamma\partial^\delta\eta^{\alpha\beta}\right) = \partial^\delta\partial^\gamma\partial^\beta - \partial^\beta\partial^\gamma\partial^\delta = 0,$$

vil (45) tilfredsstille $\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ for alle (tilstrekkelig deriverbare) $h_{\gamma\delta}$.

Det er videre praktisk å innføre tensoren $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h^{\lambda}{}_{\lambda}$, slik at $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\lambda}{}_{\lambda}$. Innsatt i (45) fås da

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\Box\,\bar{h}^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}\,\bar{h}^{\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} - \bar{h}^{\alpha\gamma}{}_{,\gamma}{}^{\beta} - \bar{h}^{\beta\gamma}{}_{,\gamma}{}^{\alpha}\right)\,, \tag{46}$$

som hvis vi pålegger betingelsen $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ (vi kan alltid gjøre det) reduserer seg til $G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box\,\bar{h}^{\alpha\beta}$. Einsteins gravitasjonsligninger i svak felt grensen blir da

$$\Box\,\bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4}\,T^{\alpha\beta}\,. \tag{47}$$

Denne ligningen kan enkelt løses ved Fourier transformasjon.

Oppgitt:

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi^a\right)}\Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{48}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \left.\frac{d}{d\epsilon}\tilde{X}\right|_{\epsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{49}$$

Noen relasjoner fra differensialgeometri:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right), \tag{50}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}, \tag{51}$$

$$R_{\beta\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}, \tag{52}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2}g_{\beta\delta}R. \tag{53}$$