



Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Torsdag 8. august 2002
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*

Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*

Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Sensur blir lagt ut på fagets hjemmeside så snart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved modellen definert ved “sine–Gordon” Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \kappa^2 \cos \lambda \varphi, \quad (1)$$

der φ er et reellt felt, og κ og λ er konstanter.

a) Hvilke fysiske dimensjoner må φ , κ og λ ha for at virkningen

$$S = \int dt d^d x \mathcal{L} \quad (2)$$

skal ha dimensjon $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$? Anta her at d er et vilkårlig positivt heltall (antallet rom-dimensjoner).

b) Skriv ned, eller utled, feltligningen for denne modellen.

c) Anta for dette punktet at feltet φ bare avhenger av én rom-koordinat z . Ligningen har da stabile statiske lokaliserte løsninger (såkalte solitære løsninger), der $\lambda \varphi \rightarrow 0$ når $z \rightarrow -\infty$ og $\lambda \varphi \rightarrow 2\pi$ når $z \rightarrow \infty$. Finn disse.

Tips: Du kan her spare tid og arbeid ved å benytte opplysningene sist i oppgavesettet.

d) Finn de tilsvarende solitære løsningene som beveger seg med konstant hastighet v .

- e) Vis at virkningen S er invariant under translasjoner i tid og rom

$$\mathbf{T}_\nu : \varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x; \varepsilon) = \varphi(x + \varepsilon e_\nu), \quad (3)$$

der e_ν er en enhetsvektor i ν -retningen, $(e_\nu)^\mu = \delta_\nu^\mu = \eta_\nu^\mu$.

Bruk Nöther-prosedyren til å finne de tilhørende konserveringslovene.

- f) I to rom-tids dimensjoner, $\varphi(x) = \varphi(z, t)$, er sine-Gordon ligningen eksakt løsbart. Dette er relatert til det faktum at den har uendelig mange lokale konserveringslover. La

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

Da kan disse konserveringslovene skrives på formen

$$\bar{\partial} J_n \{\varphi\} + \partial \bar{J}_n \{\varphi\} = 0, \quad (5)$$

der $J_n \{\varphi\}$ og $\bar{J}_n \{\varphi\}$ kan uttrykkes ved homogene polynomer i $\partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots$

For $n = 2$ har disse den generelle formen

$$J_2 = A_2 \partial^2 \varphi + B_2 (\partial \varphi)^2, \quad \bar{J}_2 = \bar{A}_2 \sin \lambda \varphi + \bar{B}_2 \cos \lambda \varphi, \quad (6)$$

der $A_2, B_2, \bar{A}_2$ og $\bar{B}_2$ er konstanter.

Bestem disse konstantene slik at konserveringsloven (5) blir oppfylt.

- g) For $n = 3$ har disse den generelle formen

$$J_3 = A_3 \partial^3 \varphi + B_3 \partial \varphi \partial^2 \varphi + C_3 (\partial \varphi)^3, \quad \bar{J}_3 = \bar{A}_3 \partial \varphi \sin \lambda \varphi + \bar{B}_3 \partial \varphi \cos \lambda \varphi, \quad (7)$$

der $A_3, B_3, C_3, \bar{A}_3$ og $\bar{B}_3$ er konstanter.

Bestem disse konstantene slik at konserveringsloven (5) blir oppfylt.

Oppgave 2.

Vi skal her se litt på en ladet punktpartikkel som beveger seg i en kombinasjon av et gravitasjonsfelt, beskrevet av den metriske tensoren $g_{\mu\nu}(x)$, og et elektromagnetisk felt, beskrevet av firer-potensialet $A_\mu(x)$. La $x^\mu(\tau)$ beskrive verdenslinjen for punktpartikkelen, der τ er egentiden. Firer-hastigheten til partikkelen er altså $u^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Dynamikken til partikkelen kan utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = -\frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - q A_\mu \dot{x}^\mu, \quad (8)$$

der m er massen og q ladningen til partikkelen.

- a) Utled Euler-Lagrange ligningen som følger av Lagrange-funksjonen L .

- b) Anta først at vi bare har et elektromagnetisk felt, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, og

$$A_\mu(x) = f(kx) e_\mu^{(1)}, \quad (9)$$

der $k_\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$ og $e_\mu^{(1)} = (0, -1, 0, 0)$, og $f(s)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon slik at $f(s) \rightarrow 0$ når $s \rightarrow \pm\infty$.

Vis at $k_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \omega \left(\frac{dx^0}{d\tau} - \frac{dx^3}{d\tau} \right)$ og $u^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$ er bevegelseskonstanter.

- c) Finn bevegelsesligningen for $u^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$, og løs den så langt du kan.
- d) Finn bevegelsesligningen for $u^0 + u^3 = \left(\frac{dx^0}{d\tau} + \frac{dx^3}{d\tau}\right)$, og løs den så langt du kan.
- e) Anta så at vi bare har et svakt gravitasjonsfelt, $A_\mu = 0$, og

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + g(kx) e_{\mu\nu}, \quad \text{med} \quad e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

der $k_\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$, a er en konstant og $g(s)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon slik at $g(s) \rightarrow 0$ når $s \rightarrow \pm\infty$.

Vis at $k_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \omega \left(\frac{dx^0}{d\tau} - \frac{dx^3}{d\tau} \right)$ er en bevegelseskonstant.

- f) Finn (de koblete) ligningene for $u^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$ og $u^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$.

Oppgave 3.

I flatt rom, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, er dynamikken for et massivt vektorfelt W_μ definert av Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}W_{\alpha\beta}W_{\mu\nu} + \kappa^2\eta^{\mu\nu}W_\mu W_\nu, \quad (11)$$

der $W_{\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu - \partial_\mu W_\nu$.

- a) Hvordan må denne Lagrangetettheten omskrives for at vi skal få en modell med generell kovarians som også er gyldig i krumt rom? Hva blir den tilhørende virkningen?

Oppgitt:**Euler-Lagrange ligningene:**

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \quad (12)$$

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a)} \Delta \varphi^a - M^\mu, \text{ når} \quad (13)$$

$$\Delta \mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{X} \right|_{\varepsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \quad (14)$$

En differensialligning med løsning:

En klasse (endelig energi) løsninger til ligningen

$$-y''(x) + \sin y(x) = 0 \quad (15)$$

er gitt som

$$y(x) = 4 \arctan e^{(x-x_0)}. \quad (16)$$