NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Torsdag 8. august 2002

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1.

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved modellen definert ved "sine–Gordon" Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)\left(\partial^\mu \varphi\right) + \kappa^2 \cos \lambda\varphi, \tag{1}$$

der φ er et reellt felt, og κ og λ er konstanter.

a) Hvilke fysiske dimensjoner må φ, κ og λ ha for at virkningen

$$S = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L} \tag{2}$$

skal ha dimensjon $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$? Anta her at d er et vilkårlig positivt heltall (antallet rom-dimensjoner).

Lagrangetettheten må ha dimensjon $[\mathcal{L}]$ slik at

$$\mathrm{s\,m}^d\ [\mathcal{L}] = \mathrm{s\,m}^{d-2}\ [\varphi]^2 = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}.$$

Dvs.

$$[\varphi] = \mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{2-d/2}\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{3}$$

Videre må $\lambda\varphi$ være dimensjonsløs for at uttrykket $\cos\lambda\varphi$ skal ha fysisk mening.

$$[\lambda] = [\varphi]^{-1} = \mathrm{kg}^{-1/2}\,\mathrm{m}^{-2+d/2}\,\mathrm{s}. \tag{4}$$

Tilsist må $\left[\kappa^2\right] = [\mathcal{L}]$,

$$[\kappa] = \mathrm{m}^{-1}\ [\varphi] = \mathrm{kg}^{1/2}\,\mathrm{m}^{1-d/2}\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{5}$$

b) Skriv ned, eller utled, feltligningen for denne modellen.

Euler–Lagrange ligningen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

blir i dette tilfellet

$$\Box\varphi = -\kappa^2 \lambda \sin\lambda\varphi, \tag{6}$$

der $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$.

c) Anta for dette punktet at feltet φ bare avhenger av én rom-koordinat z. Ligningen har da stabile statiske lokaliserte løsninger (såkalte solitære løsninger), der $\lambda\varphi \to 0$ når $z \to -\infty$ og $\lambda\varphi \to 2\pi$ når $z \to \infty$. Finn disse.

Tips: Du kan her spare tid og arbeid ved å benytte opplysningene sist i oppgavesettet.

I dette tilfellet blir ligningen

$$-\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \kappa^2\lambda \sin\lambda\varphi = 0,$$

eller med $z = \kappa\lambda x$ og $\lambda\varphi(z) = y(x)$,

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0, \tag{7}$$

som ifølge de vedlagte opplysningene har løsninger på formen

$$y(x) = 4 \arctan \mathrm{e}^{(x-x_0)}.$$

Det tilsvarende uttrykket for φ blir

$$\varphi(z) = \frac{4}{\lambda} \arctan \exp\left(\frac{z - z_0}{\kappa\lambda}\right). \tag{8}$$

d) Finn de tilsvarende solitære løsningene som beveger seg med konstant hastighet v.

I et inertialsystem som beveger seg med hastighet v i z-retningen vil denne løsningen, φ_v, se ut som (8),

$$\varphi_v(x') = \varphi(x) = \varphi(z),$$

der firer-vektorene x og x' er relatert ved en boost-transformasjon i z-retningen. La x og x'' være relatert ved den inverse boost-transformasjonen,

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & 0 & 0 & -\sinh\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\gamma & 0 & 0 & \cosh\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Da har vi, siden φ er et skalart felt, at

$$\varphi_v(x) = \varphi(x'') = \varphi(z'') = \varphi\left(\cosh\gamma\, z - \sinh\gamma\, ct\right),$$

der $v = c\tanh\gamma$, dvs. $\cosh\gamma\, z - \sinh\gamma\, ct = (z - vt)/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Eksplisitt blir da

$$\varphi_v(t, z) = \frac{4}{\lambda} \arctan \exp\left(\frac{z - vt - z_1}{\kappa\lambda\sqrt{1-(v/c)^2}}\right). \tag{9}$$

Kommentar: Det er også lett å verifisere direkte at

$$\left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f\left(\frac{z - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = f''\left(\frac{z - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right).$$

Dette er essensielt den relasjonen man trenger.

e) Vis at virkningen S er invariant under translasjoner i tid og rom

$$\boldsymbol{T}_\nu : \varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x;\varepsilon) = \varphi(x + \varepsilon\, e_\nu), \tag{10}$$

der e_ν er en enhetsvektor i ν-retningen, $(e_\nu)^\mu = \delta^\mu_\nu = \eta^\mu_\nu$.

Bruk Nöther-prosedyren til å finne de tilhørende konserveringslovene.

Vi finner

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}(x), \partial_\mu \tilde{\varphi}(x)) = \mathcal{L}(\varphi(x + \varepsilon\, e_\nu), \partial_\mu \varphi(x + \varepsilon\, e_\nu)) = \mathcal{L}(x + \varepsilon\, e_\nu).$$

Ved å skifte integrasjonsvariable, $x \to \tilde{x} = x + \varepsilon\, e_\nu$, ser vi at virkningen er invariant

$$\tilde{S} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^{d+1}x\, \tilde{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^{d+1}\tilde{x}\, \mathcal{L}(\tilde{x}) = S.$$

Vi finner

$$\Delta\varphi(x) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \partial_\nu \varphi(x),$$
$$\Delta\mathcal{L}(x) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{\mathcal{L}}(x;\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \eta^\mu_\nu\, \partial_\mu \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \eta^\mu_\nu\, \mathcal{L}(x).$$

Ved bruk av de oppgitte, generelle uttrykkene for Nöther strømmer fås energi-impuls tensoren

$$T^\mu_\nu = \partial^\mu \varphi\, \partial_\nu \varphi - \eta^\mu_\nu\, \mathcal{L}. \tag{11}$$

f) I to rom-tids dimensjoner, $\varphi(x) = \varphi(t, z)$, er sine–Gordon ligningen eksakt løsbar. Dette er relatert til det faktum at den har uendelig mange lokale konserveringslover. La

$$\partial \equiv \frac{\partial}{c\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{c\,\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}. \tag{12}$$

Da kan disse konserveringslovene skrives på formen

$$\bar{\partial} J_n\{\varphi\} + \partial \bar{J}_n\{\varphi\} = 0, \tag{13}$$

der $J_n\{\varphi\}$ og $\bar{J}_n\{\varphi\}$ kan uttrykkes ved homogene polynomer i $\partial\varphi$, $\partial^2\varphi$, ...

For $n = 2$ har disse den generelle formen

$$J_2 = A_2\, \partial^2 \varphi + B_2\, (\partial\varphi)^2, \qquad \bar{J}_2 = \bar{A}_2 \sin\lambda\varphi + \bar{B}_2 \cos\lambda\varphi, \tag{14}$$

der A_2, B_2, $\bar{A}_2$ og $\bar{B}_2$ er konstanter.

Bestem disse konstantene slik at konserveringsloven (13) blir oppfylt.

Vi trenger bevegelsesligningen, som kan skrives på formen

$$\partial\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\partial\varphi = -\kappa^2 \lambda \sin\lambda\varphi.$$

Da fås

$$\bar{\partial} J_2 = A_2\, \partial\, \bar{\partial}\partial\varphi + 2B_2\, \partial\varphi\, \bar{\partial}\partial\varphi = -\kappa^2\lambda^2 A_2\, \partial\varphi \cos\lambda\varphi - 2\kappa^2\lambda B_2\, \partial\varphi \sin\lambda\varphi,$$

og

$$\partial \bar{J}_2 = \lambda \bar{A}_2\, \partial\varphi \cos\lambda\varphi - \lambda \bar{B}_2\, \partial\varphi \sin\lambda\varphi.$$

Når vi sammenholder dette med ligning (13) ser vi at konserveringsloven blir oppfylt når vi velger

$$\bar{A}_2 = \kappa^2 \lambda A_2, \quad \bar{B}_2 = -2\kappa^2 B_2. \tag{15}$$

g) For $n = 3$ har disse den generelle formen

$$J_3 = A_3\, \partial^3 \varphi + B_3\, \partial\varphi\, \partial^2\varphi + C_3\, (\partial\varphi)^3\,, \qquad \bar{J}_3 = \bar{A}_3\, \partial\varphi\, \sin\lambda\varphi + \bar{B}_3\, \partial\varphi\, \cos\lambda\varphi, \tag{16}$$

der A_3, B_3, C_3, $\bar{A}_3$ og $\bar{B}_3$ er konstanter.

Bestem disse konstantene slik at konserveringsloven (13) blir oppfylt.

Vi finner

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} J_3 &= A_3\, \partial^2\, \bar{\partial}\partial\varphi + B_3\, \bar{\partial}\partial\varphi\, \partial^2\varphi + B_3\, \partial\varphi\, \partial\, \bar{\partial}\partial\varphi + 3C_3\, (\partial\varphi)^2\, \bar{\partial}\partial\varphi \\
&= A_3\, \kappa^2\lambda^3\, (\partial\varphi)^2\, \sin\lambda\varphi - A_3\, \kappa^2\lambda^2\, \partial^2\varphi\, \cos\lambda\varphi - B_3\, \kappa^2\lambda\, \partial^2\varphi\, \sin\lambda\varphi \\
&\quad - B_3\, \kappa^2\lambda^2\, (\partial\varphi)^2\, \cos\lambda\varphi - 3C_3\, \kappa^2\lambda\, (\partial\varphi)^2\, \sin\lambda\varphi,
\end{aligned}$$

og

$$\partial \bar{J}_3 = \bar{A}_3\, \partial^2\varphi\, \sin\lambda\varphi + \bar{A}_3\, \lambda\, (\partial\varphi)^2\, \cos\lambda\varphi + \bar{B}_3\, \partial^2\varphi\, \cos\lambda\varphi - \bar{B}_3\, \lambda\, (\partial\varphi)^2\, \sin\lambda\varphi.$$

Innsatt i ligning (13) fås betingelsen

$$\begin{aligned}
&\left(A_3\kappa^2\lambda^3 - 3C_3\kappa^2\lambda - \bar{B}_3\lambda\right) (\partial\varphi)^2\, \sin\lambda\varphi - \left(B_3\kappa^2\lambda - \bar{A}_3\right) \partial^2\varphi\, \sin\lambda\varphi \\
&- \left(B_3\kappa^2\lambda^2 - \bar{A}_3\lambda\right) (\partial\varphi)^2\, \cos\lambda\varphi - \left(A_3\kappa^2\lambda^2 - \bar{B}_3\right) \partial^2\varphi\, \cos\lambda\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Den er oppfylt dersom man velger

$$\bar{A}_3 = \kappa^2\lambda B_3, \quad \bar{B}_3 = \kappa^2\lambda^2 A_3, \quad C_3 = 0. \tag{18}$$

Oppgave 2.

Vi skal her se litt på en ladet punktpartikkel som beveger seg i en kombinasjon av et gravitasjonsfelt, beskrevet av den metriske tensoren $g_{\mu\nu}(x)$, og et elektromagnetisk felt, beskrevet av firer–potensialet $A_\mu(x)$. La $x^\mu(\tau)$ beskrive verdenslinjen for punktpartikkelen, der τ er egentiden. Firer–hastigheten til partikkelen er altså $u^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Dynamikken til partikkelen kan utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = -\frac{1}{2} m g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu\, \dot{x}^\nu - q A_\mu\, \dot{x}^\mu, \tag{19}$$

der m er massen og q ladningen til partikkelen.

a) Utled Euler-Lagrange ligningen som følger av Lagrange-funksjonen L.

Euler-Lagrange ligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$$

blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(m\, g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu + q A_\alpha \right) = \frac{1}{2} m\, g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + q A_{\mu,\alpha} \dot{x}^\mu. \tag{20}$$

Ved å utføre τ-derivasjonen og symmetrisere $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu)$, kan dette skrives på formen

$$m\left(\ddot{x}_\alpha + \Gamma_{\alpha\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = -q F_{\alpha\mu}\, \dot{x}^\mu, \tag{21}$$

der $\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}\right)$ er konneksjonen, og $F_{\alpha\mu} = \left(A_{\alpha,\mu} - A_{\mu,\alpha}\right)$ er felt-tensoren.

b) Anta først at vi bare har et elektromagnetisk felt, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, og

$$A_\mu(x) = f(kx)\, e_\mu^{(1)}, \tag{22}$$

der $k_\mu = \omega\,(1,0,0,-1)$ og $e_\mu^{(1)} = (0,-1,0,0)$, og $f(s)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon slik at $f(s) \to 0$ når $s \to \pm\infty$.

Vis at $k_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \omega\left(\frac{dx^0}{d\tau} - \frac{dx^3}{d\tau}\right)$ og $u^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$ er bevegelseskonstanter.

I dette tilfellet blir $F_{\alpha\mu} = f'(kx)\,\left(k_\mu\, e_\alpha^{(1)} - e_\mu^{(1)}\, k_\alpha\right)$, og bevegelsesligningen (med $u = \dot{x}$)

$$m\dot{u}_\alpha = qf'(kx)\,\left[(ku)e_\alpha^{(1)} - (e^{(1)}u)k_\alpha\right]. \tag{23}$$

Ved å ta skalarproduktet med den konstante vektoren k^α fås

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ku) = qf'(kx)\,\left[(ke^{(1)})(ku) - k^2(e^{(1)}u)\right] = 0,$$

fordi $(ke^{(1)}) = 0$ og $k^2 = 0$. På samme måte finner vi at $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_2 = 0$ fordi $e_2^{(1)} = 0$ og $k_2 = 0$. Vi har altså vist at $ku = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(kx)$ er en konstant K_0, slik at vi (med et passe valgt nullpunkt for τ) kan skrive $kx = K_0\tau$.

c) Finn bevegelsesligningen for $u^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$, og løs den sålangt du kan.

Siden $e_1^{(1)} = -1$, $k_1 = 0$ og $(ku) = K_0$ fås

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_1 = -qf'(K_0\tau)K_0 = -q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f(K_0\tau), \tag{24}$$

med løsning

$$u^1(\tau) = U^1 + \frac{q}{m}f(K_0\tau). \tag{25}$$

Her er $U^1 = u^1(-\infty)$, og vi har brukt at $f(s) \to 0$ når $s \to \pm\infty$.

d) Finn bevegelsesligningen for $u^0 + u^3 = \left(\frac{dx^0}{d\tau} + \frac{dx^3}{d\tau}\right)$, og løs den sålangt du kan.

Siden $e_0^{(1)} = e_3^{(1)} = 0$ og $k^0 + k^3 = 2\omega$ fås

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(u^0 + u^3\right) = \omega q f'(K_0\tau)\, u^1(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{2\omega q U^1}{K_0}\, f(K_0\tau) + \frac{\omega q^2}{mK_0}\, f(K_0\tau)^2\right), \tag{26}$$

med løsning

$$u^0(\tau) + u^3(\tau) = U^0 + U^3 + \frac{2\omega q U^1}{mK_0}\, f(K_0\tau) + \frac{\omega q^2}{m^2K_0}\, f(K_0\tau)^2, \tag{27}$$

der $U^0 = u^0(-\infty)$ og $U^3 = u^3(-\infty)$.

e) Anta så at vi bare har et svakt gravitasjonsfelt, $A_\mu = 0$, og

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + g(kx)\, e_{\mu\nu}, \qquad \text{med} \qquad e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

der $k_\mu = \omega\,(1,0,0,-1)$, a er en konstant og $g(s)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon slik at $g(s) \to 0$ når $s \to \pm\infty$.

Vis at $k_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \omega\left(\frac{dx^0}{d\tau} - \frac{dx^3}{d\tau}\right)$ er en bevegelseskonstant.

La $\boldsymbol{e}$ bety matrisen $e_{\mu\nu}$. Bevegelsesligningen kan da skrives

$$\dot{u}_\alpha = \frac{1}{2} g'(kx)\left[(u\boldsymbol{e}u)k_\alpha - 2(\boldsymbol{e}u)_\alpha(ku)\right]. \tag{29}$$

Siden $k^2 = 0$ og $k\boldsymbol{e}u = 0$ fås

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ku) = \frac{1}{2} g'(kx)\left[(u\boldsymbol{e}u)k^2 - 2(k\boldsymbol{e}u)(ku)\right] = 0, \tag{30}$$

som viser at ku er en bevegelseskonstant K_0. Vi kan derfor (ved passe valgt nullpunkt for τ) skrive $kx = K_0\tau$.

f) Finn ligningene for $u^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$ og $u^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$.

Med $k^1 = k^2 = 0$, $(\boldsymbol{e}u)_1 = au^1$, $(\boldsymbol{e}u)_2 = -au^1$, og $ku = K_0$ fås fra ligning (29)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^1 = -a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,g(K_0\tau)\right)u^1, \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^2 = \quad a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,g(K_0\tau)\right)u^2. \tag{32}$$

Disse kan omskrives på eksplisitt integrerbar form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\exp\left(ag(K_0\tau)\right)u^1 = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\exp\left(-ag(K_0\tau)\right)u^2 = 0.$$

Oppgave 3.

I flatt rom, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, er dynamikken for et massivt vektorfelt W_μ definert av Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\mu}\,\eta^{\beta\nu}\,W_{\alpha\beta}\,W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa^2\eta^{\mu\nu}\,W_\mu\,W_\nu, \tag{33}$$

der $W_{\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu - \partial_\mu W_\nu$.

a) Hvordan må denne Lagrangetettheten omskrives for at vi skal få en modell med generell kovarians som også er gyldig i krumt rom? Hva blir den tilhørende virkningen?

Vi må la $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$, og $1 = \sqrt{-\eta} \to \sqrt{-g}$, der η og g er determinanten til henholdsvis $\eta_{\mu\nu}$ og $g_{\mu\nu}$. Det er ikke nødvendig å innføre kovariant derivert i uttrykket for $W_{\mu\nu}$. Pga. antisymmetri er $W_{\mu;\nu} - W_{\nu;\mu} = W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}$ i torsjonsfri rom. Lagrangetettheten blir derfor

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,\left(-\frac{1}{4}g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,W_{\alpha\beta}\,W_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa^2 g^{\mu\nu}\,W_\mu\,W_\nu\right). \tag{34}$$

Den tilhørende virkningen er

$$S = \int d^4x\mathcal{L}. \tag{35}$$

Kommentar: Det siste spørsmålet var bare ment som en åpning for de som ønsker å skrive

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}, \tag{36}$$

og derfor ikke tar med faktoren $\sqrt{-g}$ i uttrykket for $\mathcal{L}$ (som da også bør kalles for en Lagrange funksjon istedet for en Lagrange tetthet).

Oppgitt:

Euler-Lagrange ligningene:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi^a\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \tag{37}$$

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi^a\right)} \Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{38}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{X} \bigg|_{\varepsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{39}$$

En differensialligning med løsning:
En klasse (endelig energi) løsninger til ligningen

$$-y''(x) + \sin y(x) = 0 \tag{40}$$

er gitt som

$$y(x) = 4 \arctan \mathrm{e}^{(x-x_0)}. \tag{41}$$