Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Onsdag 6. august 2003

Dette løsningsforslaget er på 9 sider.

Oppgave 1.

Dynamikken for et rotasjonssymmetrisk gravitasjonsfelt (uten kobling til materiefelter) kan med visse restriksjoner beskrives ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= r^2\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left[\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2}{r}(\nu'-\lambda') + \frac{2}{r^2}\right] \\ &\quad -r^2\,\mathrm{e}^{(\lambda-\nu)/2}\left[\ddot{\lambda} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 - \frac{1}{2}\dot{\nu}\dot{\lambda}\right] - 2\,\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2} \qquad (1)\end{aligned}$$

der $\nu = \nu(t,r)$ og $\lambda = \lambda(t,r)$ er de dynamiske størrelsene, der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden t, der $'$ betyr derivasjon med hensyn på radien r, og vi har valgt enheter slik at lyshastigheten $c = 1$.

a) Vis at (1) er ekvivalent med en Lagrangetettheten

$$\mathcal{L}' = 2\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left(1 - r\lambda'\right) - 2\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}. \qquad (2)$$

Vi observerer at

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\,\nu'\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[r^2\,\mathrm{e}^{(\lambda-\nu)/2}\,\dot{\lambda}\right]. \qquad (3)$$

De to Lagrangetetthetene avviker altså bare ved en total divergens, og er derfor ekvivalente.

b) Finn feltligningene for $\nu(t,r)$ og $\lambda(t,r)$.

Vi benytter Lagrangetettheten $\mathcal{L}'$. Euler–Lagrange ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nu} = 0$$

gir feltligningen

$$\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 1\right] = 0. \qquad (4)$$

Euler–Lagrange ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda'}$$

gir

$$-\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\,(1-r\lambda')-\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}=-\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\,\left(2+r\nu'-r\lambda'\right),$$

som forenkler til

$$\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1+r\nu')-1\right]=0. \tag{5}$$

c) Lagrangetettheten $\mathcal{L}'$ avhenger ikke eksplisitt av tiden t. Bruk Nöther's teorem til å finne konserveringsloven som følger av dette.

For å gjennomgå dette punktet grundig går vi helt tilbake til utledningen av Nöthers teorem. La φ_a angi komponentene av vektoren (ν,λ). Den infinitesemale transformasjonen av feltene er

$$\varphi_a(t,r)\to\tilde{\varphi}_a(t,r)=\varphi_a(t+\epsilon,r)=\varphi_a(t,r)+\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\varphi_a(t,r)+\mathcal{O}(\epsilon^2),$$

dvs. med $\Delta\varphi_a=\dot{\varphi}_a$. Til orden ϵ er endringen i Lagrangetettheten

$$\Delta\mathcal{L}'=\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi_a}\Delta\varphi_a+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}_a}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi_a+\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi'_a}\frac{\partial}{\partial r}\Delta\varphi_a=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}_a}\Delta\varphi_a\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi'_a}\Delta\varphi_a\right),$$

der vi i siste overgang har benyttet at feltene oppfyller Euler–Lagrange ligningene. På den andre siden er $\Delta\mathcal{L}'=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}'$, slik at konserveringsloven blir på generell form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}_a}\Delta\varphi_a-\mathcal{L}'\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi'_a}\Delta\varphi_a\right)=0.$$

Man kunne godt ha startet direkte med dette uttrykket. Hvis vi nå tar hensyn til at $\mathcal{L}'$ ikke avhenger av $\dot{\nu}$, $\dot{\lambda}$ eller ν' så forenkler konserveringsloven til

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}'+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\lambda'}\dot{\lambda}\right)=0.$$

Innsatt for $\mathcal{L}'$ gir dette

$$\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left[2r\dot{\lambda}'-(1-r\lambda')(\dot{\nu}-\dot{\lambda})\right]+\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}(\dot{\nu}+\dot{\lambda})+\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left[-2r\dot{\lambda}'-2\dot{\lambda}-r\dot{\lambda}(\nu'-\lambda')\right]=0.$$

Dette forenkler til

$$\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}\left\{\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1-r\lambda')-1\right]\dot{\nu}+\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1+r\nu')-1\right]\dot{\lambda}\right\}=0, \tag{6}$$

som vi ser er konsistent med feltligningene (som sier at de to uttrykkene i hakeparenteser forsvinner).

d) Kan du her finne andre transformasjoner som holder virkningen invariant? Hva blir i tilfelle de tilhørende konserveringslovene?

Virkningen kan gjøres invariant under generelle tidstransformasjoner. La oss bare se på det som følger av reskalering av tidsaksen, $t\to\mathrm{e}^{\epsilon}t$. De tilhørende felttransformasjonene er

$$\begin{aligned}\nu(t,r)\to\tilde{\nu}(t,r)&=\nu(\mathrm{e}^{\epsilon}t,r)+\epsilon=\nu(t,r)+\epsilon\left[t\dot{\nu}(t,r)+1\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2),\\ \lambda(t,r)\to\tilde{\lambda}(t,r)&=\lambda(\mathrm{e}^{\epsilon}t,r)=\lambda(t,r)+\epsilon t\dot{\lambda}(t,r)+\mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Den tilhørende endring i Lagrangefunksjonen blir, til orden epsilon, $\Delta\mathcal{L}' = \frac{\partial}{\partial t}(t\mathcal{L}')$. På samme måte som under forrige punkt finner vi konserveringsloven

$$\frac{\partial}{\partial t}(t\mathcal{L}') = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\lambda'}t\dot{\lambda}\right),$$

som utskrevet blir

$$\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}\left\{\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1-r\lambda')-1\right](t\dot{\nu}+2)+\left[\mathrm{e}^{-\lambda}(1+r\nu')-1\right]t\dot{\lambda}\right\}=0. \tag{7}$$

e) Bruk feltligningene til å vise at kombinasjonen $\nu+\lambda$ ikke avhenger av r.

Ved å subtrahere ligning (4) fra (5) fås

$$\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left(\nu'+\lambda'\right)=0,$$

som impliserer at $\nu+\lambda$ ikke avhenger av r.

f) Finn den generelle løsningen til feltligningene for ν og λ.

Ligning (4) kan skrives som

$$r\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{e}^{-\lambda}=\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right) \text{ eller } \frac{\partial}{\partial r}\log\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\log r,$$

som ved integrasjon gir

$$\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\frac{C(t)}{r}, \tag{8}$$

der $C(t)$ er vilkårlig. Siden $\nu+\lambda$ ikke avhenger av r fås videre

$$\mathrm{e}^{\nu}=\left(1-\frac{C(t)}{r}\right)D(t), \tag{9}$$

der $D(t)$ er vilkårlig.

Kommentar: Av disse løsningene er det bare de der C er tidsuavhengig som tilfredstiller de fullstendige Einstein-ligningene, jfr. diskusjonen tilslutt i oppgave **3**.

Oppgave 2.

Lagrangefunksjonen for relativistiske punktpartikler med masse m under konstant akselerasjon g i z-retningen er (i et bestemt koordinatsystem) gitt ved

$$L=-mc^2\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/c)^2}+mgz. \tag{10}$$

a) Skriv ned, eller utled, bevegelsesligningene for slike partikler.

The Euler Lagrange equations become

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/c)^2}}=mg\,\hat{e}_z. \tag{11}$$

Comment: This is a situation where more work may not only be a waste of time, but actually harmful. It is not useful to explicitly carry out the last time differentiation in equation (11), since it is now written in a form which may immediately be integrated. However, if one still insists on performing the differentiation, the result is

$$\frac{m\boldsymbol{a}_\perp}{\left[1-(\boldsymbol{v}/c)^2\right]^{1/2}} + \frac{m\boldsymbol{a}_\parallel}{\left[1-(\boldsymbol{v}/c)^2\right]^{3/2}} = mg\,\hat{e}_z, \tag{12}$$

where $\boldsymbol{a}_\perp$ is the component of $\boldsymbol{a} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}$ which is orthogonal to $\boldsymbol{v}$, and $\boldsymbol{a}_\parallel$ the component of $\boldsymbol{a}$ which is parallel to $\boldsymbol{v}$. The combinations $m\left[1-(\boldsymbol{v}/c)^2\right]^{-1/2}$ and $m\left[1-(\boldsymbol{v}/c)^2\right]^{-3/2}$ are sometimes (disgustingly) called transverse and parallel mass.

b) To slike partikler starter i ro ved tiden $t = 0$ i henholdsvis posisjonene $\boldsymbol{r}_1(0) = (0,0,0)$ og $\boldsymbol{r}_2(0) = (0,0,z_0)$. Finn banene $\boldsymbol{r}_k(t)$ $(k = 1,2)$ til disse to partiklene for $t \geq 0$.

The equations (11) can immediately be integrated once. Using the initial conditions this gives ($v_z = \dot{z}$)

$$\frac{\dot{z}/c}{\sqrt{1-(\dot{z}/c)^2}} = \frac{gt}{c},$$

and $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Solving for $\dot{z}$ we find

$$\dot{z} = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}}.$$

Integrating once more, using the initial conditions and the integral given at the end of the exam set, gives

$$\begin{aligned} x_1(t) = y_1(t) = 0, \quad z_1(t) &= -\frac{c^2}{g} + \frac{c^2}{g}\sqrt{1+(gt/c)^2}, \\ x_2(t) = y_2(t) = 0, \quad z_2(t) &= -\frac{c^2}{g} + z_0 + \frac{c^2}{g}\sqrt{1+(gt/c)^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

c) Hvor lang tid tar det, *målt med egentiden for disse partiklene*, å bevege seg én millioner lysår fra startpunktet (målt i det faste koordinatsystemet)?

Anta at $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ og sett $c = 3\times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Én millioner lysår $\approx 0.947\times 10^{22}$ m.

The relation between elapsed eigentime τ and coordinate time t follows from the relation

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-(\boldsymbol{v}/c)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+(gt/c)^2}}.$$

This can be integrated with the help of the formula given at the end of the exam set

$$\tau = \frac{c}{g}\log\left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right]. \tag{14}$$

We may trade the coordinate time t for the coordinate distance z travelled, using equation (13). The expression looks slightly simpler if we introduce the characteristic time

$$\tau_g = c/g = 3\cdot 10^7\ \mathrm{s} = 0.95\ \text{years},$$

and the characteristic distance

$$z_g = c\tau_g = c^2/g = 9 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 0.95\ \text{lightyears}.$$

The result is

$$\tau = \tau_g\ \log\left[1 + \frac{z + \sqrt{z^2 + 2z\,z_g}}{z_g}\right] \sim \begin{cases} \sqrt{2z/g} & \text{for } z \ll z_g, \\ \tau_g\ \log(2z/z_g) & \text{for } z \gg z_g. \end{cases} \tag{15}$$

For $z = 10^6$ lightyears this gives

$$\tau \approx 13.8\ \text{years} \approx 4.4 \times 10^8\ \text{s}. \tag{16}$$

d) Ved tiden $t = 0$ sendes det et lyssignal fra partikkel 1, dvs. fra posisjonen $\boldsymbol{r}_1(0) = (0, 0, 0)$, i retning partikkel 2 (dvs. langs z-aksen). Hvis avstanden z_0 er stor, $z_0 \geq z_{\text{max}}$, vil dette lyssignalet aldri nå fram til partikkel 2.

Bestem grenseverdien z_{max}.

The light signal follows the line $z_\gamma(t) = ct$. This will cross the line

$$z_2(t) = z_0 - z_g + \sqrt{z_g^2 + (ct)^2}$$

when $z_0 < z_g$, and not cross it when $z_0 \geq z_g$. Thus

$$z_{\text{max}} = z_g = 0.95\ \text{lightyears} = 9 \cdot 10^{15}\ \text{m}. \tag{17}$$

Oppgave 3.

Geometrien til et rotasjonssymmetrisk univers er definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^\nu\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^\lambda\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{18}$$

Her er $\nu = \nu(t, r)$, $\lambda = \lambda(t, r)$, og har vi valgt enheter slik at $c = 1$.

a) Beregn $\int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}$, der integrasjonen er over kuleflata S_2.

Finner først

$$g = \det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{\nu+\lambda}\,r^4\,\sin^2\theta,$$

og derfra

$$\int_{S_2} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g} = r^2\,\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 4\pi r^2\,\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}. \tag{19}$$

b) Beregn konneksjonskoeffisientene $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ for metrikken (18).

Det tryggeste er her å finne de geodetiske ligningene for $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi)$ fra (Stückelberg) Lagrangefunksjonen

$$L = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^\nu\dot{t}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^\lambda\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2\,\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{20}$$

og ved sammenligning med den generelle formen,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0, \tag{21}$$

lese ut konneksjonskoeffisientene. Her (i motsetning til oppgave 1) betyr $\dot{}$ derivasjon med hensyn på egentidsparameteren τ (også lik s siden vi bruker enheter der $c = 1$). Derved trenger vi bare å forholde oss til ledd som vi ser eksplisitt, og vil ikke så lett overse noen ledd.

t-ligningen blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\mathrm{e}^\nu\left(\ddot{t} + \frac{\partial \nu}{\partial t}\dot{t}^2 + \frac{\partial \nu}{\partial r}\dot{t}\dot{r}\right) = \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^\nu\,\frac{\partial \nu}{\partial t}\,\dot{t}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^\lambda\,\frac{\partial \lambda}{\partial t}\,\dot{r}^2 = 0,$$

eller ordnet

$$\mathrm{e}^\nu\left(\ddot{t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial t}\,\dot{t}^2 + \frac{\partial \nu}{\partial r}\,\dot{t}\dot{r} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\,\frac{\partial \lambda}{\partial t}\,\dot{r}^2\right) = 0.$$

Av dette kan vil lese ut konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^0}_{\mu\nu}$,

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial t} & \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial r} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\,\frac{\partial \lambda}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

r-ligningen blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mathrm{e}^\lambda\left(\ddot{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\,\dot{t}\,\dot{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r}\,\dot{r}^2\right) = \frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^\nu\frac{\partial \nu}{\partial r}\,\dot{t}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial r}\,\dot{r}^2 + r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right),$$

eller ordnet

$$\mathrm{e}^\lambda\left(\ddot{r} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\frac{\partial \nu}{\partial r}\,\dot{t}^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\,\dot{t}\dot{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial r}\,\dot{r}^2 - r\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dot{\theta}^2 - r\mathrm{e}^{-\lambda}\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = 0$$

Av dette kan vil lese ut konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^1}_{\mu\nu}$,

$$\mathbf{\Gamma}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\frac{\partial \nu}{\partial r} & \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial t} & \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\mathrm{e}^{-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\mathrm{e}^{-\lambda}\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{23}$$

θ-ligningen blir

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2,$$

eller ordnet

$$r^2\left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right) = 0.$$

Av dette kan vil lese ut konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^2}_{\mu\nu}$,

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{24}$$

ϕ-ligningen blir

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = r^2\sin^2\theta\left(\ddot{r} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\theta} + 2\cot\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right) = 0.$$

Av dette kan vi lese ut konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^3}_{\mu\nu}$,

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Kommentar:
Eksamensoppgaven går ikke langt nok til å knytte sammenhengen mellom oppgave **1** (påstått å omhandle dynamikken for et rotasjonssymmetrisk gravitasjonsfelt) og oppgave **3** (som omhandler geometrien til et rotasjonssymmetrisk rom). Det ville blitt for omfattende. Vi skal imidlertid behandle dette i denne sluttkommentaren.
Konneksjonskoeffisientene vi fant over kan mer hensiktsmessig samles i et annet sett med matriser, nemlig slik at ${(\mathbf{\Gamma}_\lambda)^\mu}_\nu = {\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}$. Eksplisitt utskrevet er er disse

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot{\nu} & \frac{1}{2}\nu' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\nu' & \frac{1}{2}\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\nu' & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\lambda} & \frac{1}{2}\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\mathrm{e}^{-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Gamma}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\mathrm{e}^{-\lambda}\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Her har vi skiftet notasjon, og lar $\dot{}$ bety derivasjon med hensyn på tiden t og $'$ bety derivasjon med hensyn på radien r.
Vi kan så regne ut krumningstensoren $\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{\Gamma}_\nu - \partial_\nu\mathbf{\Gamma}_\mu + \mathbf{\Gamma}_\mu\mathbf{\Gamma}_\nu - \mathbf{\Gamma}_\nu\mathbf{\Gamma}_\mu$, definert slik at ${(\boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha}_\beta = {R^\alpha}_{\beta\mu\nu}$.

Ved litt langtekkelig, men rutinemessig regning finner man

$$\boldsymbol{R}_{01} = -\boldsymbol{R}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\lambda-\nu}\mathcal{A} - \mathcal{B} & 0 & 0 \\ \mathcal{A} - e^{\nu-\lambda}\mathcal{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der $\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda})$, $\quad \mathcal{B} = \dfrac{1}{4}(2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')$

$$\boldsymbol{R}_{02} = -\boldsymbol{R}_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}re^{-\lambda}\nu' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}re^{-\lambda}\dot{\lambda} & 0 \\ -\frac{1}{2r}e^{\nu-\lambda}\nu' & -\frac{1}{2r}\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{03} = -\boldsymbol{R}_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}re^{-\lambda}\sin^2\theta\,\nu' \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}re^{-\lambda}\sin^2\theta\,\dot{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2r}e^{\nu-\lambda}\,\nu' & -\frac{1}{2r}\dot{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}re^{-\nu}\dot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' & 0 \\ -\frac{1}{2r}\dot{\lambda} & -\frac{1}{2r}\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{13} = -\boldsymbol{R}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}re^{-\nu}\sin^2\theta\,\dot{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}re^{-\lambda}\sin^2\theta\,\lambda' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2r}\dot{\lambda} & -\frac{1}{2r}\lambda' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{23} = -\boldsymbol{R}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - e^{-\lambda})\sin^2\theta \\ 0 & 0 & (e^{-\lambda} - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

Fra denne finner vi komponentene i Ricci-tensoren

$$R_{00} = (\boldsymbol{R}_{10})^1{}_0 + (\boldsymbol{R}_{20})^2{}_0 + (\boldsymbol{R}_{30})^3{}_0 = -\mathcal{A} + e^{\nu-\lambda}\left(\mathcal{B} + \frac{1}{r}\nu'\right)$$

osv. til

$$R^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -e^{-\nu}\mathcal{A} + e^{-\lambda}\left(\mathcal{B} + \frac{1}{r}\nu'\right) & \frac{1}{r}e^{-\nu}\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r}e^{-\lambda}\dot{\lambda} & -e^{-\nu}\mathcal{A} + e^{-\lambda}\left(\mathcal{B} - \frac{1}{r}\lambda'\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\mathcal{C}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\mathcal{C}\right) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

der $\mathcal{C} = 1 + \frac{1}{2}r\,(\nu' - \lambda')$. Skalar krumning blir derfor

$$R = R^\mu{}_\mu = -2e^{-\nu}\mathcal{A} + e^{-\lambda}\left[2\mathcal{B} + \frac{2}{r}\left(\nu' - \lambda'\right) + \frac{2}{r^2}\right] - \frac{2}{r^2}. \tag{27}$$

Dette betyr at gravitasjonsbidraget til virkningen for slike feltkonfigurasjoner er

$$S_{\mathrm{HE}} = -\frac{1}{16\pi G_N}\int dt\,dr\,d\theta d\phi\,\sqrt{-g}\,R = \frac{1}{4G_N}\int dt\,dr\,r^2 e^{(\nu+\lambda)/2}\,R = \int dt\,dr\,\mathcal{L}, \tag{28}$$

der $\mathcal{L}$ er Lagrangetettheten (1). Her har vi ved andre likhet brukt resultatet fra oppgave **3a**, og ved siste likhet valgt enheter slik at $4G_N = 1$. Alle løsninger (av den antatte form) av de fullstendige Einstein ligningene,

$$G^\mu{}_\nu = 0$$

er garantert å være løsning av de Euler-Lagrange ligningene som kan utledes fra $\mathcal{L}$. Men det omvendte trenger ikke å være tilfellet: De fullstendige Einstein ligningene svarer til mer generelle variasjoner av metrikken; dette kan føre til flere restriksjoner. I dette tilfellet finner vi Einstein tensoren til

$$G^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2}\left[e^{-\lambda}(1-r\lambda')-1\right] & \frac{1}{r}e^{-\nu}\dot{\lambda} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r}e^{-\lambda}\dot{\lambda} & -\frac{1}{r^2}\left[e^{-\lambda}(1+r\nu')-1\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^3{}_3 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

der $G^2{}_2 = G^3{}_3 = 2e^{-\nu}\mathcal{A} - e^{-\lambda}\left[2\mathcal{B} + \frac{1}{2r}(\nu' - \lambda')\right]$. Euler-Lagrange ligningen (4) er derfor ekvivalent med ligningen $G^0{}_0 = 0$, og Euler-Lagrange ligningen (5) med ligningen $G^1{}_1 = 0$. Men Lagrangetettheten (1), eller (2), er ikke tilstrekkelig til å pålegge betingelsene $G^0{}_1 = G^1{}_0 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = 0$. Disse er oppfylt dersom $\dot{\lambda} = 0$. Av de løsningene som vi fant i punkt **1f** er det derfor bare de der C er tidsuavhengig som er løsning av de fullstendige Einstein-ligningene.