Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Løsningsforslag til eksamen i
SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Onsdag 28. mai 2003

Dette løsningsforslaget er på 9 sider.

Oppgave 1.

Dynamikken for et lukket, isotropt og homogent univers koblet til et Klein-Gordon felt kan (med visse kvalifikasjoner) beskrives ved Lagrangefunksjonen

$$L = a^2\ddot{a} + a + a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3\,\dot{\varphi}^2, \tag{1}$$

der $a = a(t)$ er universets radius.

a) Vis at (1) er ekvivalent med en Lagrangefunksjonen

$$L' = a - a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3\,\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Vi observerer at

$$L = L' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\dot{a}\right). \tag{3}$$

De to Lagrangefunksjonene avviker bare ved en totalderivert, og er derfor ekvivalente.

b) Finn bevegelsesligningene for a og φ.

Vi bruker Lagrangefunksjonen (2), siden den bare avhenger av første-deriverte av de dynamiske variable og derfor er av standard form. Euler-Lagrange ligningen for a,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial L'}{\partial a},$$

blir, etter sammentrekning av ledd,

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 1 + \frac{3}{2}a^2\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{4}$$

For sammenligning med de kosmologiske ligningene (på standard form) er det naturlig å dividere ligning (4) med a^2, og omskrive den på formen

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 1}{a^2} = -\frac{3}{2}\dot{\varphi}^2. \tag{5}$$

Euler-Lagrange ligningen for φ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^3\dot{\varphi}\right) = 0. \tag{6}$$

c) Lagrangefunksjonen L' avhenger ikke eksplisitt av tiden t. Bruk Nöther's teorem til å finne den konserverte størrelsen (kall den E) som følger av dette.

Vi finner et standard uttrykk for konservert energi

$$E = \frac{\partial L'}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L' = -a\dot{a}^2 - a + \frac{1}{2}a^3\dot{\varphi}^2. \tag{7}$$

d) Kan du her finne andre transformasjoner som holder virkningen invariant? Hva blir i tilfelle de tilhørende konserveringslovene?

Lagrangefunksjonen (og virkningen) er invariant under transformasjonen

$$\varphi \to \varphi + \varepsilon, \tag{8}$$

dvs. med $\Delta\varphi = 1$, $\Delta L' = 0$. Dette gir opphav til en konservert størrelse

$$Q = \frac{\partial L'}{\partial \varphi} = a^3\dot{\varphi}. \tag{9}$$

Vi observerer at bevegelsesligningen (6) for φ nettopp sier at $\dot{Q} = 0$.

Kommentar: Bevegelsesligningene (4,6) er også invariante under transformasjonen

$$(a(t), \varphi(t)) \to (\tilde{a}(t), \tilde{\varphi}(t)) = \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon}a(\mathrm{e}^{\varepsilon}t), \varphi(\mathrm{e}^{\varepsilon}t)\right),$$

men denne holder ikke virkningen invariant og fører derfor ikke til noen konserveringslov.

e) Det viser seg at man må velge startbetingelsene slik at $E = 0$ (for at de fullstendige Einstein ligningene skal være oppfyllt). Hvilken sammenheng må det da være mellom $\dot{\varphi}(0)$, $a(0)$ og $\dot{a}(0)$?

Betingelsen $E = 0$ medfører at

$$-a(t)\dot{a}(t)^2 - a(t) + \frac{1}{2}a(t)^3\dot{\varphi}(t)^2 = 0 \tag{10}$$

for alle tider t, og spesielt da for $t = 0$. For sammenligning med de kosmologiske ligningene (på standard for) er det naturlig å dividere ligning (10) med $a(t)^3$, og omskrive den på formen

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{1}{a(t)^2} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}(t)^2.$$

f) Anta at $\dot{\varphi}(0) = 10^{10}$ og $a(0) = 10^{-3}$. Hva blir den maksimale verdien som $a(t)$ kan anta?

Fra disse startbetingelsene følger det at $Q = \left(10^{-3}\right)^3 10^{10} = 10$, dvs. at $\dot{\varphi}(t) = 10\,a(t)^{-3}$. Innsatt i betingelsen $E = 0$ gir dette

$$\dot{a}(t)^2 + 1 - 50\,a(t)^{-4} = 0. \tag{11}$$

Siden $\dot{a}^2 \geq 0$ må

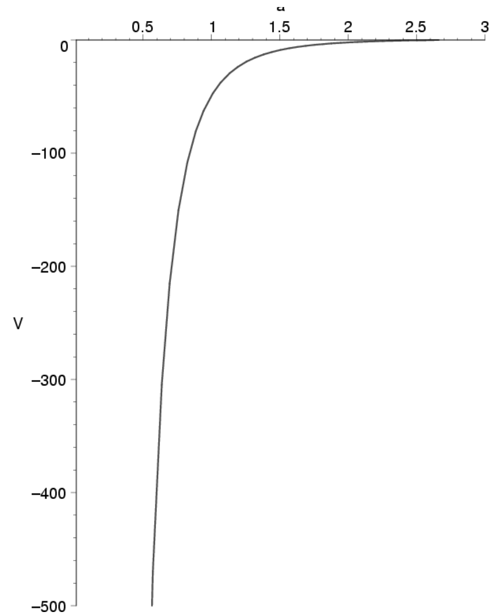
$$a(t) \leq a_{\max} = 50^{1/4} \approx 2.659. \tag{12}$$

g) Lag en kvalitativ skisse av tidsforløpet til $a(t)$, gitt startbetingelsene over.

Ligning (11) kan tolkes som energiuttrykket for en ikkerelativistisk partikkel (med masse $m = 2$) i et potensial

$$V(a) = 1 - 50^{1/4}\, a^{-4}$$

(jfr. figuren til høyre). Ved $t = 0$ kastes denne partikkelen opp fra $a = 10^{-3}$ med akkurat så stor hastighet at totalenergien er 0. Som vi allerede vet vil den da nå opp til sin maksimale verdi $a = a_{\text{max}}$. Bevegelsen vil være symmetrisk om det tidspunktet t_{max} når maksimum nås. Konstantleddet 1 i $V(a)$ er neglisjerbart unntatt nær maksimum, så vi kan grovt sett forenkle bevegelsesligningen til

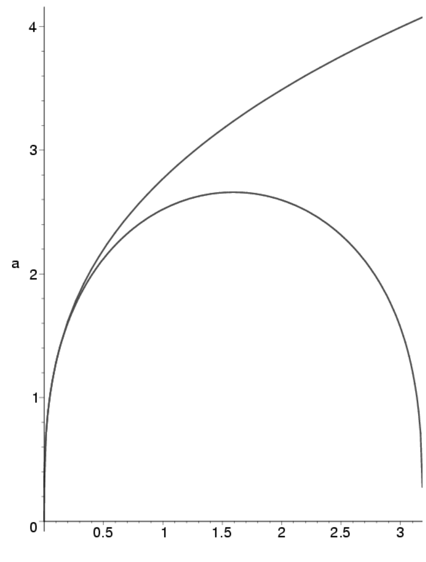


$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}a(t)^3\right) \approx \sqrt{50}, \quad a(0) = 10^{-3}$$

med løsning

$$a(t) \approx \left[10^{-9} + 3\sqrt{50}\,t\right]^{1/3}. \tag{13}$$

Denne tilnærmingen forutsier at $a(t) = a_{\text{max}}$ ved tiden $t = t_{\text{max}} \approx \frac{1}{3}\,50^{1/4} \approx 0.886$. Det virkelige maksimumet må intreffe noe senere, fordi konstantleddet i potensialet etterhver får noe effekt (og virker "bremsende"). Ved hjelp av denne analysen kan man tegne en bra kvalitativ skisse av tidsforløpet til $a(t)$, inkludert skala på aksene.



Figuren over viser en numerisk løsning av problemet sammenlignet med tilnærmingen over. Det viser seg at maksimum a i virkeligheten inntrer ved tiden $t_{\text{max}} = 1.300\ldots$.

Oppgave 2.

Start med Minkowski metrikken

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2. \tag{14}$$

og transformer denne til et akselerert koordinatsystem (t, z) ved følgende relasjoner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{g}\sqrt{1+2gz}\,\sinh(gt), \\ \xi &= \frac{1}{g}\sqrt{1+2gz}\,\cosh(gt). \end{aligned} \tag{15}$$

a) Finn uttrykket for linje-elementet $\mathrm{d}s^2$ i de nye koordinatene (t, z).

Vi finner

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta &= \frac{\partial\eta}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial\eta}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \sqrt{1+2gz}\cosh gt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{1+2gz}}\sinh gt\,\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}\xi &= \frac{\partial\xi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial\xi}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \sqrt{1+2gz}\sinh gt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{1+2gz}}\cosh gt\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

og derav

$$\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2 = (1+2gz)\ \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1+2gz}\,\mathrm{d}z^2 \tag{16}$$

etter bruk av relasjonen $\cosh^2 gt - \sinh^2 gt = 1$.

b) Finn bevegelsesligningene for en punktpartikkel i det akselererte koordinatsystemet.

Det er enklest å benytte (Stückelberg) Lagrangefunksjonen, generelt på formen

$$L = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Her spesialiserer den seg til

$$L = -\frac{1}{2}\,(1+2gz)\,\dot{t}^2, + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2gz}\dot{z}^2, \tag{17}$$

der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på s (som her er lik τ, siden vi bruker enheter der $c = 1$). Dette fører Euler-Lagrange ligningene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,(1+2gz)\,\dot{t} = 0, \tag{18}$$

og

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{1+2gz}\dot{z} = \frac{\partial L}{\partial z} = -g\dot{t}^2 - \frac{g}{(1+2gz)^2}\,\dot{z}^2.$$

Ved å utføre s-derivasjonen på venstre side og multiplisere med $1 + 2gz$ kan denne ligningen omskrives på formen

$$\ddot{z} = -g\left[(1+2gz)\dot{t}^2 - \frac{1}{1+2gz}\dot{z}^2\right]. \tag{19}$$

c) Vis at bevegelsesligningene fra forrige punkt kan omskrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} = -g, \tag{20}$$

der s er egentiden til partikkelen.

Hvis vi dividerer linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + 2gz)\ \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1+2gz}\,\mathrm{d}z^2$$

med $\mathrm{d}s^2$ får vi relasjonen

$$1 = (1 + 2gz)\ \dot{t}^2 - \frac{1}{1+2gz}\,\dot{z}^2, \tag{21}$$

som er en konserveringslov som følger av at Lagrangefunksjonen ikke avhenger eksplisitt av s. Innsatt i ligning(19) gir dette ligning (20).

Oppgave 3.

Geometrien til et lukket, homogent og isotropt univers er definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{22}$$

Her har vi valgt enheter slik at $c = 1$. Vinklene tar verdier i følgende intervall: $0 \le \chi \le \pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$.

a) Beregn $\int \mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}$.

Fra linje-elementet (22) leser vi ut metrisk tensor til å være

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2\sin^2\chi\,\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Det følger at $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = a^3\sin^2\chi\,\sin\theta$, og derav

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g} = a^3\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\,\sin^2\chi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \\ &= a^3\times\frac{\pi}{2}\times 2\times 2\pi = 2\pi^2 a^3.\end{aligned} \tag{23}$$

b) Beregn konneksjonskoeffisientene $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ for metrikken (22).

Det tryggeste er her å finne de geodetiske ligningene for $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \chi, \theta, \phi)$ fra (Stückelberg) Lagrangefunksjonen

$$L - \frac{1}{2}\dot{t}^2 + \frac{1}{2}a^2\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}a^2\sin^2\chi\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}a^2\sin^2\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{24}$$

og ved sammenligning med den generelle formen,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\,\dot{x}^\lambda = 0, \tag{25}$$

lese ut konneksjonskoeffisientene. Her betyr $\dot{}$ derivasjon med hensyn på egentidsparameteren τ (også lik s siden vi bruker enheter der $c = 1$). Derved trenger vi bare å forholde oss til ledd som vi ser eksplisitt, og vil ikke så lett overse noen ledd.

t-ligningen blir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-\dot{t}\right) = -\ddot{t} = aa'\left(\dot{\chi}^2 + \sin^2\chi\dot{\theta}^2 + \sin^2\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right),$$

der $'$ betyr derivasjon med hensyn på t. Av dette kan vi lese ut konneksjonskoeffisientene $\Gamma^0_{\mu\nu}$ (når vi antar at de er symmetriske under ombytte av μ og ν).

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa'\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa'\sin^2\chi\,\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{26}$$

χ-ligningen blir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}a^2\dot{\chi} = a^2\ddot{\chi} + 2aa'\dot{t}\,\dot{\chi} = a^2\sin\chi\,\cos\chi\,\dot{\theta}^2 + a^2\sin\chi\,\cos\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

eller ordnet på standard form

$$\ddot{\chi} + 2(a'/a)\,\dot{\chi}\dot{t} - \sin\chi\,\cos\chi\,\dot{\theta}^2 - \sin\chi\,\cos\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 = 0.$$

Av dette kan vi lese ut konneksjonskoeffisientene $\Gamma^1\mu\nu$.

$$\mathbf{\Gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & a'/a & 0 & 0 \\ a'/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\chi\,\cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\chi\,\cos\chi\,\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{27}$$

θ-ligningen blir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}a^2\sin^{\chi}\,\dot{\theta} = a^2\sin^2\,\ddot{\chi} + 2aa'\sin^2\chi\,\dot{t}\,\dot{\theta} + 2a^2\sin\chi\,\cos\chi\dot{\chi}\,\dot{\theta} = a^2\sin^2\chi\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2,$$

eller ordnet på standard form

$$\ddot{\theta} + 2(a'/a)\dot{t}\,\dot{\theta} + 2\cot\chi\,\dot{\chi}\,\dot{\theta} - \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0.$$

Av dette kan vi lese ut konneksjonskoeffisientene $\Gamma^2_{\mu\nu}$.

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'/2 & 0 \\ 0 & 0 & \cot\chi & 0 \\ a'/a & \cot\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\,\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{28}$$

ϕ-ligningen blir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}a^2\sin^2\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\phi} = a^2\sin^2\chi\,\sin^2\theta\,\ddot{\phi} + 2aa'\sin^2\chi\,\sin^2\theta\,\dot{t}\,\dot{\phi}$$
$$+2a^2\sin\chi\cos\chi\,\sin^2\theta\,\dot{\chi}\,\dot{\phi} + 2a^2\sin^2\chi\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi} = 0,$$

eller ordnet på standard form

$$\ddot{\phi} = 2a'/a\dot{t}\dot{\phi} + 2\cot\chi\,\dot{\chi}\,\dot{\phi} + 2\cot\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi} = 0. \tag{29}$$

Av dette kan vi lese ut konneksjonskoeffisientene $\Gamma^3_{\mu\nu}$.

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a'/a \\ 0 & 0 & 0 & \cot\chi \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ a'/a & \cot\chi & \cot\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Kommentar:
Eksamensoppgaven går ikke langt nok til å knytte sammenhengen mellom oppgave **1** (påstått å omhandle dynamikken for et lukket, isotropt og homogent univers koblet til et Klein-Gordon felt) og oppgave **3** (som omhandler geometrien for et lukket, isotropt og homogent univers). Det ville blitt for omfattende. Vi skal imidlertid behandle dette i denne sluttkommentaren. Konneksjonskoeffisientene vi fant over kan mer hensiktsmessig samles i et annet sett med matriser, nemlig slik at $(\mathbf{\Gamma}_\lambda)^\mu_\nu = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$. Eksplisitt utskrevet er er disse

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{a}/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{a}/a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a\dot{a} & 0 & 0 \\ \dot{a}/a & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot\chi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\dot{a}\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\chi\,\cos\chi & 0 \\ \dot{a}/a & \cot\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a\dot{a}\sin^2\chi\,\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\chi\cos\chi\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \dot{a}/a & \cot\chi & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Her har vi skiftet notasjon, og lar igjen $\dot{}$ bety derivasjon med hensyn på tiden t.

Vi kan så regne ut krumningstensoren $\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\Gamma}_\mu + \boldsymbol{\Gamma}_\mu \boldsymbol{\Gamma}_\nu - \boldsymbol{\Gamma}_\nu \boldsymbol{\Gamma}_\mu$, definert slik at $(\boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$. Ved litt langtekkelig, men rutinemessig regning finner man

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{01} &= -\boldsymbol{R}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & a\ddot{a} & 0 & 0 \\ \ddot{a}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{R}_{02} &= -\boldsymbol{R}_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\ddot{a}\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{a}/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{R}_{03} &= -\boldsymbol{R}_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a\ddot{a}\sin^2\chi\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{a}/a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{R}_{12} &= -\boldsymbol{R}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\dot{a}^2)\sin^2\chi & 0 \\ 0 & -(1+\dot{a}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{R}_{13} &= -\boldsymbol{R}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\dot{a}^2)\sin^2\chi\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\dot{a}^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{R}_{23} &= -\boldsymbol{R}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\dot{a}^2)\sin^2\chi\sin^2\theta \\ 0 & 0 & -(1+\dot{a}^2)\sin^2\chi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Fra denne finner vi komponentene i Ricci-tensoren

$$
R_{00} = (\boldsymbol{R}_{10})^1{}_0 + (\boldsymbol{R}_{20})^2{}_0 + (\boldsymbol{R}_{30})^3{}_0 = -3\ddot{a}/a
$$

osv. til

$$
R^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\frac{3a\ddot{a}}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2}{a^2} \end{pmatrix} \tag{31}
$$

og skalar krumning

$$
R = R^\mu{}_\nu = -\frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 1\right). \tag{32}
$$

Dette betyr at gravitasjonsbidraget til virkningen for slike feltkonfigurasjoner er

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{HE}} &= -\frac{1}{16\pi G_N}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\,\theta\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}\,R = \frac{3\pi}{4G_N}\int \mathrm{d}t\ \left(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2 + a\right) \\
&= 2\pi^2 \int \mathrm{d}t\ \left(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2 + a\right).
\end{aligned} \tag{33}
$$

Her har vi brukt resultatet (23) fra oppgave **3a**, og ved siste overgang valgt enheter slik at $G_N = \frac{3}{8\pi}$. Tilsvarende blir bidraget til virkningen fra Klein-Gordon feltet

$$S_{\mathrm{KG}} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = 2\pi^2 \int \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}a^3\,\dot{\varphi}^2. \tag{34}$$

Her har vi valgt $\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi$, der φ bare avhenger av tiden. Den totale virkningen kan derfor skrives

$$S = 2\pi^2 \int \mathrm{d}t\; L, \tag{35}$$

der L er Lagrangefunksjonen (1) oppgitt i oppgave **1**. Alle løsninger (av den antatte form) av de fullstendige Einstein ligningene,

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi G_N\,T^\mu{}_\nu = 3\,T^\mu{}_\nu \quad \text{(i siste overgang settes } G_N = \frac{3}{8\pi}\text{)}$$

er garantert å være løsning av den Euler-Lagrange ligningen (4) som kan utledes fra L. Men det omvendte trenger ikke å være tilfellet: De fullstendige Einstein ligningene svarer til mer generelle variasjoner av metrikken; dette kan føre til flere restriksjoner. Her finner vi Einstein tensoren til

$$G^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{3\dot{a}^2+3}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a\ddot{a}+\dot{a}^2+1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a\ddot{a}+\dot{a}^2+1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2a\ddot{a}+\dot{a}^2+1}{a^2} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

og energi-impuls tensoren til

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Euler-Lagrange ligningen (5) er derfor ekvivalent med f.eks. ligningen $G^1{}_1 = 3\,T^1{}_1$, men ikke med den mer restriktive $G^0{}_0 = 3\,T^0{}_0$ (som er ekvivalent med at den konserverte størrelsen $E = 0$, jfr. ligning (7)).