Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i SIF40AQ RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 25. januar 2002
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside, `http://bohr.phys.ntnu.no/~kolausen/SIF40AQ`, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1

a) Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

1. $e^+\gamma \to e^+\gamma$
2. $e^+\gamma \to e^+\gamma\gamma$
3. $e^+\mu^- \to e^-\mu^+$
4. $e^+\mu^- \to e^+\mu^-$
5. $e^+e^- \to \mu^+\mu-$
6. $e^- \to e^-\mu^+\mu-$
7. $\gamma\gamma \to \gamma$
8. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
9. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma\gamma$

b) Se nå i litt mer detalj på Compton spredning, $e^-\gamma \to e^-\gamma$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser. Anta at det innkommende (resp. utgående) elektronet har kvantetall p, s (resp. p', s'), og at det innkommende (resp. utgående) fotonet har kvantetall k, r (resp. k', r'). Innfør videre $q = p + k$ og $q' = p - k'$.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.
3. Benytt "naturlige enheter" (der $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) og anta at prosessen betraktes fra et koordinatsystem der det innkommende fotonet har frekvens ω, dvs. at $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, og spres mot et elektron som opprinnelig er i ro, dvs. at $p = (m, 0, 0, 0)$. Bruk konservering av energi og bevegelsesmengde til å bestemme frekvensen ω' til det utgående fotonet som funksjon av fotonets spredningsvinkel ϑ.
4. Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at det innkommende fotonet har svært lav frekvens, $\omega \ll m$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet da må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.
5. Det differensielle spredningstverrsnittet for Compton spredning kan skrives på formen,
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = K|\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{1}$$
der $\mathcal{M}_{fi}$ er spredningsamplituden fra underpunkt 2 og $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Bruk informasjon i vedlegget til å finne et eksplisitt uttrykk for faktoren K.
6. Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (r, s) til de innkommende partiklene, og summerer over spinntilstandene (r', s') til de utgående partiklene. Amplitudekvadratet $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer). Finn denne summen. Du trenger ikke å regne ut sporene.

Oppgitt:

Planck's konstant	$\hbar = 1.054\,572\,66(63) \times 10^{-34}$ J s
Lyshastigheten	$c = 299\,792\,458$ m s^{-1}
Elektronets masse	$m = 9.1096 \times 10^{-31}$ kg
Finstrukturkonstanten	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/1/137.035\,989\,5(61)$

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du analysere en variant av det fri elektromagnetiske felt, definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\,\mathbf{B}^2 + \theta\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}, \tag{2}$$

der $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ kan uttrykkes ved vektorpotensialet $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \tag{3}$$

I første del av oppgaven skal θ regnes som en konstant dimensjonsløs parameter. Det regnes hele tiden med naturlige enheter, dvs. der $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.

a) Finn den kanoniske konjugerte impulstettheten $\mathbf{\Pi_A}$ til feltet $\mathbf{A}$.

b) I en kanonisk kvantisering av denne teorien, hva skal lik tid (equal time) kommutatoren

$$\left[\dot{A}^j(\mathbf{x},0), A^k(\mathbf{y},0)\right]$$

være?

c) Finn den tilhørende Hamiltontettheten $\mathcal{H}$ for denne modellen.

d) Bruk de generelle Euler-Lagrange ligningene til å finne bevegelsesligningene for $\mathbf{A}$-feltet.

e) Anta nå at θ er tidsavhengig, $\theta = \mu t$, der μ er konstant parameter. Hvilken massedimensjon må μ ha?

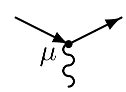
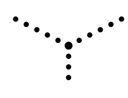
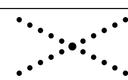
f) Hva blir bevegelsesligningene for $\mathbf{A}$-feltet i dette tilfellet?

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i'\,)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i'}{(2\pi)^3\,2E_i'} \tag{4}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\!\xrightarrow{\ p\ }\!\!\bullet$	$\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\underset{\mu}{\bullet}\!\overset{k}{\sim\!\sim\!\sim}\!\bullet\ \nu$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{5}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{6}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{9}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{10}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{13}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{14}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$