Institutt for fysikk 2006

TFY4100 og TFY4105 Fysikk
Eksamen 30.mai 2006. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	C	D	B	E	E	B	E	B	A	A

Oppgave 2. Mekanikk.

a) Treghetsmomenet om aksen gjennom opphengningspunktene: $I = M\ell^2$.

Dreiemomentet: $\tau(\theta) = -Mg\,\ell \sin\theta$, hvor $\tau(\theta) = -Mg\ell\theta$ når $\theta \ll 1$.

Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse: $\tau(\theta) = I\ddot{\theta}$.

Innsetting av av uttrykkene for τ og I gir

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0,$$

når $\theta \ll 1$, dvs. $\sin\theta = \theta$.

b) Gitt at $\theta(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$, får man

$\dot{\theta}(t) = C_1\omega \cos\omega t - C_2\omega \sin\omega t$ og

$\ddot{\theta}(t) = -C_1\omega^2 \sin\omega t - C_2\omega^2 \cos\omega t$.

Innsetting av uttrykkene for $\theta(t)$ og $\ddot{\theta}(t)$ i bevegelseslikninga gir at den genererelle løsningen er en løsning kun når $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

Startbetingelser:

$\theta(t = 0) = 0$ gir $\theta(0) = C_1 \sin\omega \cdot 0 + C_2 \cos\omega \cdot 0 = 0$, dvs. $\underline{C_2 = 0}$.

$\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$ gir $\dot{\theta}(0) = C_1\omega \cos\omega \cdot 0 - 0 \cdot \omega \sin\omega \cdot 0 = \dot{\theta}_0$, dvs. $\underline{C_1 = \dot{\theta}_0/\omega}$.

c) Rotsjonsmengden (spinnet) ved $t = 0$ før det minste barnet hopper opp i huska: $L = I\dot{\theta}$, hvor I er treghetsmomentet med det største barnet i huska.

Rotasjonssmengde umiddelbart etter det minste barnet har hoppet opp i huska: $L' = I'\dot{\theta}'$ hvor $\dot{\theta}'$ er vinkelhastigheten umiddelbart etter at begge barna er på plass i huska og $I' = (M + m)\ell^2$ er treghetsmomentet med begge barna i huska.

Her vil $L = L'$, fordi det ikke er noe ytre dreiemoment, hvilket gir at $\dot{\theta}' = \frac{I}{I'}\dot{\theta} = \frac{M}{M-m}\dot{\theta}$.

Kinetisk energi før : $W^{\mathrm{kin}} = (1/2)I\dot{\theta}^2$
Kinetisk energi etter : $W'^{\mathrm{kin}} = (1/2)I'\dot{\theta}'^2 = (1/2)(I^2/I')\dot{\theta}^2$.

Potensiell energi ved maks utsving før og etter :
$W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = Mg\ell(1 - \cos\theta_{\mathrm{max}})$
$W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = (M + m)g\ell(1 - \cos\theta'_{\mathrm{max}})$

Energibevaring for den videre bevegelse gir at $W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = W^{\mathrm{kin}}$ and $W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = W'^{\mathrm{kin}}$

$$\frac{W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}}}{W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}}} = \frac{W'^{\mathrm{kin}}}{W^{\mathrm{kin}}} \Longrightarrow \frac{(M + m)g\ell(1 - \cos\theta'_{\mathrm{max}})}{Mg\ell(1 - \cos\theta_{\mathrm{max}})} = \frac{(1/2)I^2/I'\dot{\theta}^2}{(1/2)I\dot{\theta}^2},$$

som gir at

$$\frac{M + m}{M}\frac{1 - \cos\theta'_{\mathrm{max}}}{1 - \cos\theta_{\mathrm{max}}} = \frac{I'}{I} = \frac{M}{M + m}.$$

$$\cos\theta'_{\mathrm{max}} = 1 - \left(\frac{M}{M + m}\right)^2 (1 - \cos\theta_{\mathrm{max}}).$$

d) I og med at man kan se bort fra luftmotstandene, er det ytre dreiemoment om massefellespunktet til motorsyklisten lik null. Den totale spinnet til motorsykkel og førerer forbli derfor uendret under hoppet.

Det totale spinnet består av spinnet til hvert av hjulene pluss spinnet assosiert med endering i vinkelen θ.

Det å gi mer gass, øker spinnet til bakhjulet, men spinnet til framhjulet forblir uendret. For at det totale spinnet skal forbli uendret, må sykkelen som helhet begynne å rotere i retning motsatt rotasjonen av bakhjulet, dvs. θ vil øke.

Aktivering av håndbremsa på framhjulet reduserer spinnet til framhjulet, men spinnet til bakhjulet forblir uendret. For at det totale spinnet skal forbli uendret, må sykkelen som helhet begynne å rotere i samme rotasjoen til framhjulet, dvs. θ vil reduseres.

Oppgave 3. Fluiddynamikk

a) Volumet av tanken er $V = \pi R^2 \ell$, der ℓ er vanndybden. Ved start av tømmingen er derfor høydeforskjellen mellom utløpet og vannoverflata

$$y_0 = \ell_0 + h_0 = \frac{V_0}{\pi R^2} + h_0 = \frac{25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{\pi \cdot (0,125\ \mathrm{m})^2} + 0,500\ \mathrm{m} = 1,009\ \mathrm{m} = \underline{1,01\ \mathrm{m}}.$$

b) Vi bruker Bernoullis likning for en strømlinje gjennom vannoverflata A og utløpet B:

$$p_\mathrm{A} + \frac{1}{2}\rho v_\mathrm{A}^2 + \rho g h_\mathrm{A} = p_\mathrm{B} + \frac{1}{2}\rho v_\mathrm{B}^2 + \rho g h_\mathrm{B}.$$

Ved vannoverflata er hastigheten v_A forsvinnende liten og trykket $p_\mathrm{A} = p_0 =$ ytre lufttrykk. Ved utløpet B må også trykket være atmosfæretrykk: $p_\mathrm{B} = p_0$. Dette gir

$$\rho g h_\mathrm{A} = \frac{1}{2}\rho v_\mathrm{B}^2 + \rho g h_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{B}(y) = \sqrt{2g(h_\mathrm{A} - h_\mathrm{B})} = \underline{\sqrt{2g \cdot y(t)}}.$$

Ved $t = 0$ idet tømmingen starter er $v_\mathrm{B}(y_0) = \sqrt{2 \cdot 9,8\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 1,01\ \mathrm{m}} = 4,45\ \mathrm{m/s} = \underline{4,5\ \mathrm{m/s}}$.

c) Antatt lik hastighet i hele slangen får vi

$$Q(y) = (\text{areal})(\text{hastighet}) = \pi r^2 v_\mathrm{B}(y) = \underline{\pi r^2 \sqrt{2g \cdot y(t)}},$$

og numerisk verdi ved $t = 0$ er

$$Q(y_0) = \pi (4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \cdot 4,45\ \mathrm{m/s} = 5,03 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \cdot 4,45\ \mathrm{m/s} = 0,224 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} = \underline{0,22\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{s}}.$$

Oppgave 4. Termodynamikk.

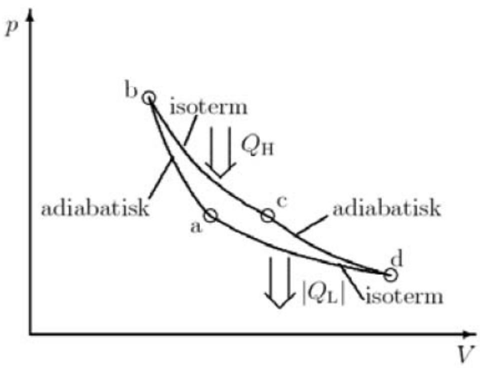
a) **Reversibel prosess:** En prosess som går så langsomt at systemet kan regnes for å være i termodynamisk likevekt under hele prosessen. **Adiabatisk prosess:** En varmeisolert prosess, $Q = 0$.

Carnotprosessen: (se figuren)
a $\rightarrow$ b: Adiabatisk prosess, $Q = 0$,
b $\rightarrow$ c: Isoterm prosess, $T = T_\mathrm{H} =$ konstant.
c $\rightarrow$ d: Adiabatisk prosess, $Q = 0$,
d $\rightarrow$ a: Isoterm prosess, $T = T_\mathrm{L} =$ konstant.

Arbeidet er gitt av: $W = Q_\mathrm{H} + Q_\mathrm{L}$, med $Q_\mathrm{L} < 0$.

Definisjon av virkningsgrad: $\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{H}} = \frac{Q_\mathrm{H} + Q_\mathrm{L}}{Q_\mathrm{H}}$

Uttrykt ved temperaturene T_H og T_L er virkningsgraden gitt som: $\eta = 1 - \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$.



b) Vi anvender definisjonen på virkningsgraden. Søkt er $\dot{Q}_\mathrm{L}$, mens $\dot{W}$ er kjent. Det gir:

$$\eta = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_\mathrm{H}} = \frac{\dot{W}}{\dot{W} - \dot{Q}_\mathrm{L}} \qquad \Rightarrow \qquad -\dot{Q}_\mathrm{L} = \dot{W} \cdot \frac{1 - \eta}{\eta}$$

Vi kjenner verdien av η siden temperaturene er kjent: $\eta = 1 - \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}} = 1 - \frac{290}{520} = 0,4423$. Setter vi dette inn får vi for varmen som avgis til elvevannet:

$$-\dot{Q}_{\rm L} = 1000 \cdot 10^6\,{\rm W} \cdot \frac{1-0,4423}{0,4423} = \underline{1,261 \cdot 10^9\,{\rm W}}.$$

Varmebalansen i elva $|\dot{Q}_{\rm L}| = c_{\rm vann} \cdot \rho_{\rm vann} \cdot \dot{M} \cdot \Delta T$, gir temperaturøkningen

$$\Delta T = \frac{|\dot{Q}_{\rm L}|}{c_{\rm vann} \cdot \rho_{\rm vann} \cdot \dot{M}} = \frac{1,261 \cdot 10^9\,{\rm W}}{4,19 \cdot 10^3\,{\rm J/kg\,K} \cdot 1,00 \cdot 10^3\,{\rm kg/m^3} \cdot 40\,{\rm m^3/s}} = \underline{7,5\,{\rm K}}.$$

c) Fra gasslign ingen fås for punkt c:

$$V_{\rm b} = V_{\rm c} = \frac{nRT_{\rm c}}{p_{\rm c}} = \frac{1\,{\rm mol} \cdot 8,31\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 293\,{\rm K}}{1,01 \cdot 10^5\,{\rm N/m^2}} = 2,41 \cdot 10^{-2}\,{\rm m}^3\,.$$

Langs isotermen er temperaturen konstant slik at $T_{\rm a} = T_{\rm b} = \underline{373\,{\rm K}}$.

Adiabatkonstanten $\gamma = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5}$ er oppgitt for den toatomiske gassen (5 frihetsgrader). Da er $c'_V = \frac{5}{2}R$. Adiabatlikningen for trinnet c$\rightarrow$a blir

$$T_{\rm c}V_{\rm c}^{\gamma-1} = T_{\rm a}V_{\rm a}^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad V_{\rm a} = V_{\rm c} \cdot \left(\frac{T_{\rm c}}{T_{\rm a}}\right)^{1/(\gamma-1)} = 2,41 \cdot 10^{-2}\,{\rm m}^3 \cdot \left(\frac{293}{373}\right)^{5/2} = \underline{1,32 \cdot 10^{-2}\,{\rm m}^3}.$$

Trykket i tilstand a er da gitt ved den ideelle tilstandslikningen

$$p_{\rm a} = \frac{nRT_{\rm a}}{V_{\rm a}} = \frac{1\,{\rm mol} \cdot 8,31\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 373\,{\rm K}}{1,32 \cdot 10^{-2}\,{\rm m}^3} = \underline{2,35 \cdot 10^5\,{\rm N/m^2}}.$$

Og trykket i tilstand b tilsvarende

$$p_{\rm b} = \frac{nRT_{\rm b}}{V_{\rm b}} = \frac{1\,{\rm mol} \cdot 8,31\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 373\,{\rm K}}{2,41 \cdot 10^{-2}\,{\rm m}^3} = \underline{1,29 \cdot 10^5\,{\rm N/m^2}}.$$

d) For adiabaten c$\rightarrow$a er utført arbeid lik reduksjon i indre energi (1.lov: $W = 0 - \Delta U$, her er W negativ og U øker). Det totale arbeidet som utføres av gassen ved et omløp er da

$$W_{\rm tot} = W_{\rm ab} + W_{\rm bc} + W_{\rm ca} = nRT_{\rm a}\int_{V_{\rm a}}^{V_{\rm b}} \frac{{\rm d}V}{V} + 0 - \Delta U_{\rm ca} = nRT_{\rm a} \ln\frac{V_{\rm b}}{V_{\rm a}} - nc'_V(T_{\rm a} - T_{\rm c})$$

Innsatt tallverdier gir dette

$$W_{\rm tot} = 1\,{\rm mol} \cdot 8,31\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 373\,{\rm K} \cdot \ln\frac{2,41}{1,32} - 1\,{\rm mol} \cdot 20,79\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot (373\,{\rm K} - 293\,{\rm K}) = \underline{203\,{\rm J}}.$$

For å finne virkningsgrad må vi også finne *tilført* varme som kun skjer i det isoterme trinnet a$\rightarrow$b. Her er $\Delta U_{\rm ab} = 0$, og ifølge første hovedsetning er

$$Q_{\rm ab} = W_{\rm ab} = nRT_{\rm a} \cdot \ln\frac{V_{\rm b}}{V_{\rm a}} = 1\,{\rm mol} \cdot 8,31\,{\rm Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 373\,{\rm K} \cdot \ln\frac{2,41}{1,32} = 1867\,{\rm J}.$$

Da er virkningsgraden $\eta = \dfrac{W_{\rm tot}}{Q_{\rm ab}} = \dfrac{203\,{\rm J}}{1867\,{\rm J}} = \underline{0,109}$.

Alternativt kan vi gjøre det vanskeligere og finne virkningsgraden uttrykt ved temperaturer og volum:

$$\eta = \frac{W_{\rm tot}}{Q_{\rm ab}} = \frac{W_{\rm ab} + W_{\rm ca}}{W_{\rm ab}} = 1 + \frac{W_{\rm ca}}{W_{\rm ab}} = 1 + \frac{-nc'_V(T_{\rm a} - T_{\rm c})}{nRT_{\rm a} \cdot \ln\frac{V_{\rm b}}{V_{\rm a}}} = 1 - \frac{5/2R(T_{\rm a} - T_{\rm c})}{RT_{\rm a} \cdot \ln\frac{V_{\rm b}}{V_{\rm a}}} = 1 - \frac{5}{2}\,\frac{1 - T_{\rm c}/T_{\rm a}}{\ln\frac{V_{\rm b}}{V_{\rm a}}}\,,$$

som gir samme tallverdi:

$$\eta = 1 - \frac{5}{2}\,\frac{1 - 293/373}{\ln\frac{2,41}{1,32}} = \underline{0,109}.$$

A.Mi. 13.juni 2006