Løsningsskisse EKSAMEN i FYSIKK, 30. mai 2006

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

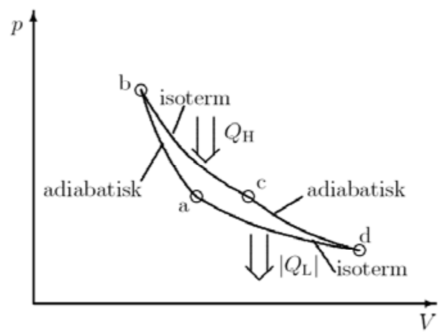
Fasit

1. C
2. D
3. D
4. B
5. C
6. E
7. E
8. B
9. E
10. D
11. B
12. D

Løsningsforslag
Oppgave 2
a)

- Reversibel prosess: En prosess som går så langsomt at systemet kan regnes for å være i termodynamisk likevekt under hele prosessen.
- Adiabatisk prosess: En varmeisolert prosess; $\Delta Q = 0$

Carnot prosessen



a→b: Adiabatisk prosess, $\Delta Q = 0$
b→c: Isoterm prosess, $T = T_H$
c→d: Adiabatisk prosess, $\Delta Q = 0$
d→a: Isoterm prosess, $T = T_L$

Arbeidet er gitt av:

$W = Q_H + Q_L$; $Q_L < 0$

Definisjon av virkningsgrad: $\eta = \dfrac{W}{Q_H} = \dfrac{Q_H + Q_L}{Q_H}$

Uttrykt ved temperaturene T_H og T_L er virkningsgraden gitt som: $\eta = \dfrac{T_H - T_L}{T_H}$

b)
Vi anvender def på virkningsgraden. Søkt er Q_L, W er kjent. Det gir:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{W - Q_L}$$

som gir

$$-Q_L = W \cdot \frac{1-\eta}{\eta}$$

Vi kjenner verdien av η siden temperaturen er kjent. Setter vi dette inn får vi

$$-Q_2 = W \cdot \frac{T_L}{T_H - T_L} = 10^9[Watt] \cdot \frac{290[K]}{520[K] - 290[K]} = 1.26 \cdot 10^9[Watt]$$

Denne varmen avgis til elvevannet.

Varmebalansen i elva:

$$|Q_L| = c_{vann} \cdot \rho \cdot M \cdot \Delta T$$

som gir

$$\Delta T = \frac{|Q_L|}{c_{vann} \cdot \rho \cdot M} = \frac{1.26 \cdot 10^9[Watt)}{4.2 \cdot 10^3[J/kgK] \cdot 10^3[kg] \cdot 40[m^3 s^{-1}]} = 7.5[K]$$

c)

Fra gasslignigen fås for punkt c:

$$V_c = \frac{nRT_c}{p_c} = \frac{(1\text{ mol}) \times (8.31\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}) \times (293\text{ K})}{1.01 \times 10^5\text{ Pa}}$$

$$\underline{V_c = V_b = 2.41 \times 10^{-2}\text{ m}^3}$$

Siden gassen er toatomisk ($\nu = 5$), er adiabatkonstanten

$$\gamma = \frac{\nu + 2}{\nu} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Adiabatligningen for trinnet ca gir

$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_a V_a^{\gamma-1}$$

$$V_a = V_c \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Men $T_a = T_b = 373$ K, og vi får

$$V_a = (2.41 \times 10^{-2}\text{ m}^3) \times \left(\frac{293\text{ K}}{373}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$\underline{V_a = 1.32 \times 10^{-2}\text{ m}^3}$$

Trykket i tilstand a er da gitt ved den ideelle tilstandsligningen

$$p_a = \frac{nRT_a}{V_a} = \frac{(1\text{ mol}) \times (8.31\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}) \times (373\text{ K})}{1.31 \times 10^{-2}\text{ m}^3}$$

$$\underline{p_a = 2.35 \times 10^5\text{ Pa}}$$

Trykket i tilstand b er tilsvarende

$$p_b = \frac{nRT_b}{V_b} = \frac{(1\ \text{mol}) \times (8.31\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}) \times (373\ \text{K})}{2.41 \times 10^{-2}\ \text{m}^3}$$
$$\underline{p_b = 1.29 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

d) Det totale arbeidet som utføres av gassen ved et omløp er:

$$\begin{aligned}
W_{tot} &= W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = -nRT_a \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} + 0 + \Delta U_{ca} \\
&= -nRT_a \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) + nc_v(T_a - T_c) \\
&= -(1\ \text{mol}) \times (8.31\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}) \times (373\ \text{K}) \times \ln\left(\frac{2.41 \times 10^{-2}\ \text{m}^3}{1.32 \times 10^{-2}\ \text{m}^3}\right) \\
&\quad +(1\ \text{mol}) \times (20.8\ \text{J/molK}) \times (373\ \text{K} - 293\ \text{K}) \\
&\quad \underline{W_{tot} = -203\ \text{J}}
\end{aligned}$$

Det *tilføres* varme kun i det isoterme trinnet, og den er i følge TDs første lov med $\Delta U_{ab} = 0$

$$\begin{aligned}
Q_{ab} &= -W_{ab} = nRT_a \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) \\
&\quad (1\ \text{mol}) \times (8.31\,\text{J}\,\text{mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}) \times (373\ \text{K}) \times \ln\left(\frac{2.41 \times 10^{-2}\ \text{m}^3}{1.32 \times 10^{-2}\ \text{m}^3}\right) \\
Q_{ab} &= 1867\ \text{J}
\end{aligned}$$

Virkningsgraden blir da

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{-W_{tot}}{Q_{ab}} = \frac{-W_{ab} - W_{ca}}{-W_{ab}} = 1 + \frac{W_{ca}}{W_{ab}} = 1 + \frac{nc_V(T_a - T_c)}{-nRT_a \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = 1 - \frac{\frac{\nu}{2}R(T_a - T_c)}{RT_a \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} \\
\eta &= 1 - \frac{5}{2}(1 - \frac{T_c}{T_a}) \Big/ \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)
\end{aligned}$$

Den numeriske verdien av virkningsraden kan vi finne av

$$\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_{ab}} = \frac{203\ \text{J}}{1867\ \text{J}}$$
$$\underline{\eta = 0.109}$$

Løsningsforslag Oppgave 3

a) Treghetsmomenet om aksen gjennom opphengningspunktene: $I = M\ell^2$.

Dreiemomentet: $\tau(\theta) = -Mg\,\ell \sin\theta$, hvor $\tau(\theta) = -Mg\ell\theta$ når $\theta \ll 1$.

Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse: $\tau(\theta) = I\ddot{\theta}$.

Innsetting av av uttrykkene for τ og I gir

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0,$$

når $\theta \ll 1$, dvs. $\sin\theta = \theta$.

b) Gitt at $\theta(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$, får man

$\dot{\theta}(t) = C_1\omega\cos\omega t - C_2\omega\sin\omega t$ og

$\ddot{\theta}(t) = -C_1\omega^2\sin\omega t - C_2\omega^2\cos\omega t$.

Innsetting av uttrykkene for $\theta(t)$ og $\ddot{\theta}(t)$ i bevegelseslikninga gir at den genererelle løsningen er en løsning kun når $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

Startbetingelser:

$\theta(t=0) = 0$ gir $\theta(0) = C_1\sin\omega\cdot 0 + C_2\cos\omega\cdot 0 = 0$, dvs. $\underline{C_2 = 0}$.

$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ gir $\dot{\theta}(0) = C_1\omega\cos\omega\cdot 0 - 0\cdot\omega\sin\omega\cdot 0 = \dot{\theta}_0$, dvs. $\underline{C_1 = \dot{\theta}_0/\omega}$.

c) Rotsjonsmengden (spinnet) ved $t = 0$ før det minste barnet hopper opp i huska: $L = I\dot{\theta}$, hvor I er treghetsmomentet med det største barnet i huska.

Rotasjonssmengde umiddelbart etter det minste barnet har hoppet opp i huska: $L' = I'\dot{\theta}'$ hvor $\dot{\theta}'$ er vinkelhastigheten umiddelbart etter at begge barna er på plass i huska og $I' = (M+m)\ell^2$ er treghetsmomentet med begge barna i huska.

Her vil $L = L'$, fordi det ikke er noe ytre dreiemoment, hvilket gir at $\dot{\theta}' = (I/I')\dot{\theta}$.

Kinetisk energi før : $W^{\mathrm{kin}} = (1/2)I\dot{\theta}^2$
Kinetisk energi etter : $W'^{\mathrm{kin}} = (1/2)I'\dot{\theta}'^2 = (1/2)(I^2/I')\dot{\theta}^2$.

Potensiell energi ved maks utsving før og etter :
$W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = Mg\ell(1-\cos\theta_{\mathrm{max}})$
$W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = (M+m)g\ell(1-\cos\theta'_{\mathrm{max}})$

Energibevaring for den videre bevegelse gir at $W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = W^{\mathrm{kin}}$ and $W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}} = W'^{\mathrm{kin}}$

$$\frac{W'^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}}}{W^{\mathrm{pot}}_{\mathrm{max}}} = \frac{W'^{\mathrm{kin}}}{W^{\mathrm{kin}}} \Longrightarrow \frac{(M+m)g\ell(1-\cos\theta'_{\mathrm{max}})}{Mg\ell(1-\cos\theta_{\mathrm{max}})} = \frac{(1/2)I^2/I'\dot{\theta}^2}{(1/2)I\dot{\theta}^2},$$

som gir at

$$\frac{M+m}{M}\frac{1-\cos\theta'_{\mathrm{max}}}{1-\cos\theta_{\mathrm{max}}} = \frac{I'}{I} = \frac{M}{M+m}.$$

$$\cos\theta'_{\mathrm{max}} = 1 - \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 (1-\cos\theta_{\mathrm{max}}).$$

d) I og med at man kan se bort fra luftmotstandene, er det ytre dreiemoment om massefellespunktet til motorsyklisten lik null. Den totale spinnet til motorsykkel og førerer forbli derfor uendret under hoppet.

Det totale spinnet består av spinnet til hvert av hjulene pluss spinnet assosiert med endering i vinkelen θ.

Det å gi mer gass, øker spinnet til bakhjulet, men spinnet til framhjulet forblir uendret. For at det totale spinnet skal forbli uendret, må sykkelen som helhet begynne å rotere i retning motsatt rotasjonen av bakhjulet, dvs. θ vil øke.

Aktivering av håndbremsa på framhjulet reduserer spinnet til framhjulet, men spinnet til bakhjulet forblir uendret. For at det totale spinnet skal forbli uendret, må sykkelen som helhet begynne å rotere i samme rotasjoen til framhjulet, dvs. θ vil reduseres.

Løsningsskisse, Oppgave 4

a) Magnetisk fluks er definert som magnetfeltet gjennom en flate med areal A:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = 0{,}002 Tm^2$$

b) Faradays induksjonslov er gitt ved: $V_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$ hvor V_{ind} er indusert spenning.

Tidsavhengigheten til fluksen kan komme fra et tidsvarierende B-felt, eller fra tidsvarierende areal, f.eks. roterende strømsløyfe.

Lens lov: retningen på den induserte strømmen er slik at magnetfeltet som blir satt opp prøver å motvirke endringen i magnetisk fluks.

c) Vi deler opp i tre tidsintervaller:

(i) 0 < t < 1s: Fluksen gjennom strømsløyfen er konstant og $\boxed{V_{ind} = 0}$.

(ii) 1s < t < 2s: Staven kommer inn i B-feltet, og arealet endres med tiden: $\frac{dA}{dt} = -av$

Indusert spenning blir dermed: $\boxed{V_{ind} = BAv = 0{,}002V}$

Indusert strøm blir i klokkeretningen (prøver å motvirke reduksjon i fluksen).

(iii) 2s < t < 3s: Staven er til venstre for B-feltet og fluksen er igjen konstant: $\boxed{V_{ind} = 0}$.

d) Strømmen i sløyfa er: $I = \frac{V_{ind}}{R} = 0{,}002A$.

Kraft på strømleder i B-felt er gitt ved: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$. Her er $l = a$ er lengden av staven som er inne i B-feltet.

Siden strømmen og B-feltet står vinkelrett på hverandre fås: $\boxed{F = IlB = 0{,}00004N}$.
Retningen av kraften er gitt av høyrehåndsregelen og blir mot høyre (mot bevegelsesretningen).