Institutt for fysikk, NTNU

TFY4102 Fysikk, våren 2007

Løsningsforslag: Kont.eksamen TFY4102, august 2007

I tilknytning til en del av oppgavene finner du nedenfor kommentarer av forskjellig slag. Dette må *ikke* forståes slik at kommentarer av denne typen var forventet i eksamensbesvarelsene! Kommentarene er ment å utfylle løsningsforslagene, forhåpentlig til glede for deg som bruker dem i arbeidet med faget i tiden fremover.

NB: På oppgavesettets forside påstås at settet inneholder 14 punkt. Det er feil, bare 13 punkt inngår.

Oppgave 1

a. På grunn av jordrotasjonen vil et punkt på breddegraden φ bevege seg i en sirkelbane med radius $r = R\cos\varphi$, der R er jordradien. (Sjekk: Ved nordpolen er $\varphi = 90°$, slik at $r = 0$, ved ekvator er $\varphi = 0$, slik at $r = R$. OK!). Akselerasjonsvektoren (sentripetalakselerasjonen) i en sirkelbevegelse med konstant fart v (som her!) er rettet mot sirkelens sentrum, og har tallverdien $|a| = v^2/r = \omega^2 r$, der $\omega = v/r$ er vinkelhastigheten. Sett fra det roterende systems synspunkt (vårt eget, her vi sitter på jordkarusellen!), opplever vi en sentrifugalkraft rettet motsatt sentripetalkraften, og med tilhørende akselerasjon hvis størrelse er $|a_s| = |a|$. Derved

$$|a_s| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi,$$

der T er døgnets lengde.

b. Med tall for Trondheims breddegrad $\varphi = 63.5°$, samt $R = 6\,400\,\text{km}$ og $T = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 8.64 \cdot 10^4\,\text{s}$:

$$|a_s| = \frac{4\pi^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \cdot 0.446}{8.64^2 \cdot 10^8}\,\text{m/s}^2 = 1.51 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}^2.$$

Med andre ord, forholdet til tallverdien av tyngdens akselerasjon blir:

$$|a_s|/g = 1.51 \cdot 10^{-2}/9.81 = 1.54 \cdot 10^{-3} = 0.154\%.$$

Kommentar: At sentripetalakselerasjonens tallverdi er neglisjerbar relativt tyngdens akselerasjon, er i tråd med våre daglige erfaringer. (Det ville vært meget pinlig dersom den var *større* enn g: Da ville vi (og atmosfæren) hatt problemer med å henge med på karusellen, spesielt på ekvator!) En annen sak er at vektoren $\boldsymbol{g}$ peker inn mot jordas sentrum, mens vektoren $\boldsymbol{a}_s$ peker vinkelrett ut fra jordaksen. Resultanten er derved vektorsummen av de to.

Oppgave 2

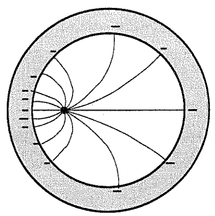
a. Når koherent lys med bølgelengde λ passerer (vinkelrett) gjennom en spalt med bredde a, fører fenomenet diffraksjon (med utgangspunkt i Huygens' prinsipp) til at lys på baksiden av spalten sendes i mange retninger θ relativt det innfallende lysets retning. Figur 33-11 i Tipler og Mosca (5th ed.) viser både intensitetsfordelingen som funksjon av $\sin\theta$ og et utsnitt av et typisk stripemønster observert på en skjerm bak spalten. Siden $I = I_0 \cdot (\sin\alpha/\alpha)^2$, med $\alpha = (\pi a/\lambda)\sin\theta$, vil en bred spalt ($a \gg \lambda$) gi mange striper nær foroverretningen, der $\sin\theta \approx \theta$.

b. Siden $\lim_{\alpha\to 0}(\sin\alpha/\alpha) = 1$ er intensiteten i forover-retningen I_0. Første nullpunkt er derfor gitt av $\alpha = \pi$. Dersom dette første nullpunkt ikke skal opptre før $|\theta| = \pi/2$, må $\alpha = (\pi a/\lambda)\sin(\pi/2) = \pi a/\lambda < \pi$, eller med andre ord: $a < \lambda$. Betingelsen for at lys sendes i alle retninger $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ bak skjermen med spalt er altså at spaltebredden er mindre enn lysets bølgelengde.

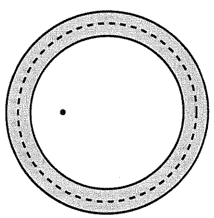
c. Lysets bølgelengde (avhengig av fargen) er rundt $0.5\,\mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-7}\text{m}$. En radiobølge med $f = 100\,\text{MHz}$ har bølgelengden $\lambda = (3.0 \cdot 10^8/1 \cdot 10^8)\,\text{m} = 3\,\text{m}$. Lys og radiobølger er begge eksempler på elektromagnetiske bølger. Det eneste som skiller dem er bølgelengden. Visdommen som kan trekkes ut av regningene under pkt.b, er at bølger med bølgelengde større en størrelsen av de objekter de møter på sin vei, ikke har noen problemer med å runde dem. En radiobølge av typen det her er snakk om, blir i liten grad forhindret av objekter av størrelse opp til et høyhus.

Kommentar: En annen sak er at energikvantet knyttet til en bølge med bølgelengde λ har energien $hf = hc/\lambda$, der h er Planck's konstant. En radiobølge har derfor et energikvant som er syv størrelsesordener mindre enn energien i et lyskvant. Radiobølgen har derfor mye større vansker med å sparke rundt med atomer og molekyler den møter på sin vei. Derved vil den, på den annen side, ha vondt for å miste sine ørsmå energikvant, og et høyhus med diverse innhold vil derfor, langt på vei, være "gjennomsiktig" for radiobølger.

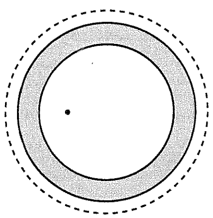
Oppgave 3



a. Til venstre er feltlinjene fra (den positive) punktladningen Q til innsiden av kuleskallet grovskissert. Feltlinjene stråler ut fra Q og ender opp på innsiden av kuleskallet, med rettvinklet innfall. (Med metallisk kuleskall, kan det elektriske feltet ikke ha noen komponent parallelt med indre overflate. Det ville ha ført til en elektrisk strøm, som ville sørget for at likevektsfordelingen, med vinkelrett innfall av det elektriske feltet, ble gjenopprettet. Den negative ladningen på skallets indre overflate fordeler seg ujevnt: Ladningstetten er størst nær punktladningen, minst lengst fra.



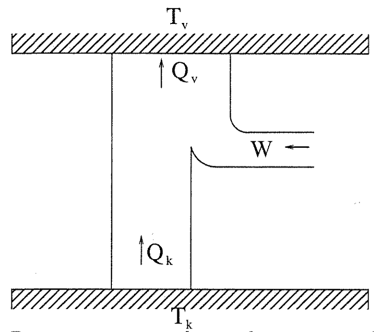
b. Når Gauss' lov, $\int d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = Q_{\text{tot}}/\varepsilon_0$, skal brukes, står vi fritt til å velge den lukkete flaten det skal integreres over. Valget er en utfordring til elektrostatisk innsikt og erfaring! I dette tilfellet er det hensiktsmessig å velge en lukket Gaussflate som i sin helhet ligger *inne i det metalliske kuleskallet*, for eksempel kuleflaten som er stiplet i figuren til venstre. *I* metallet må nødvendigvis det elektriske feltet være null (ellers ville elektronene få fart på seg). Derved følger det av Gauss' lov at totalladningen inne i Gaussflaten må være null, slik at totalladningen på kuleskallets indre overflate må kompensere punktladningen, og derfor være $-Q$.
Siden kuleskallet er oppgitt til å være elektrisk nøytralt, må da totalladningen på kuleskallets *ytre* overflate være $+Q$. Denne ytre overflateladningen blir ikke påvirket av noe elektrisk felt gjennom det metalliske kuleskallet, og likevektsfordelingen vil derfor være en *konstant ladningstetthet* over den ytre overflaten.



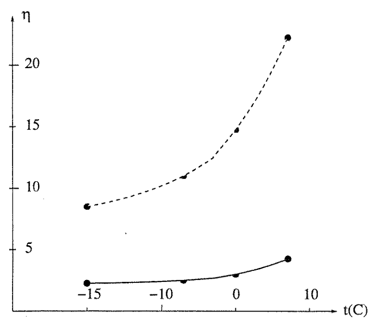
c. Siden overflateladningen $+Q$ på ytre overflate er kulesymmetrisk fordelt, bestemmes feltet på utsiden av kula, i avstand $r(> R_y)$, enklest ved å velge en kulesymmetrisk Gaussflate med radius r, som vist i figuren til venstre. Det elektriske feltet må, av symmetrigrunner, peke radielt ut fra kula. Gauss' lov gir da umiddelbart

$$E_r(r) = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2).$$

Oppgave 4



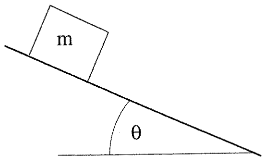
a. Effektfaktoren for varmepumper defineres rimeligvis som forholdet mellom gevinsten, i form av varmemengden $|Q_v|$ levert til stua ved temperaturen T_v, og kostnaden, i form av det elektriske arbeidet W som går med i prosessen. Altså, $\eta = |Q_v|/W = |Q_v|/(|Q_v| - |Q_k|)$. At $W = |Q_v| - |Q_k|$, der $|Q_k|$ er varmemengden trukket ut av lavtemperaturreservoaret, er en direkte følge av varmelærens første hovedsetning (eller: energibevarelse).
Dersom prosessen kunne kjøres reversibelt, ville vi i dette tilfellet ha en Carnotprosess (kjørt baklengs). For denne idealiserte prosessen er effektfaktoren $\eta_C = T_v/(T_v - T_k)$.



b. Effektfaktoren i den kommersielle varmepumpen er skissert heltrukket i figuren til venstre, mens det tilsvarende Carnotresultatet er stiplet. (Husk at det er absolutt-temperaturer som inngår i Carnot-formelen, *ikke* Celsius-temperaturer!) Figuren viser at temperaturavhengigheten til den kommersielt tilgjengelige pumpen er noenlunde tilsvarende den idealiserte Carnot-prosessens avhengighet av utetemperaturen $T_k = 273 + t$.

Men absoluttverdien er adskillig mindre i virkeligheten enn for den idealiserte prosessen, med en faktor 4-5. Forholdet η_C/η er størst for høye utetemperaturer. Alt dette har sin bakgrunn i at i en virkelig varmepumpe er prosessene irreversible: Vår tålmodighet er begrenset, prosessene kan ikke gå uendlig langsomt, energi tapes andre steder enn som varme inn i stua, vifter trekker energi, etcetc. Når utetemperaturen nærmer seg innetemperaturen, vil Carnot-faktoren gå mot uendelig, mens en kommersiell varmepumpes effektfaktor alltid vil være begrenset. Derfor vil η_C/η øke når T_k øker.

Oppgave 5



a. Kraften parallelt skråplanet er

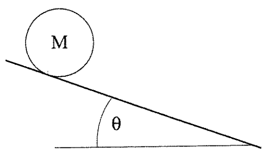
$$mg\sin\theta - \mu \cdot mg\cos\theta$$

og Newtons 2.lov gir da akselerasjonen langs skråplanet som

$$a = g(\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta).$$

Siden den statiske og kinetiske friksjonekoeffisienten i dette tilfellet begge kan settes lik μ, vil den minimale hellingsvinkel som må til for at klossen skal skli være gitt av $a = 0$, eller

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}\mu.$$



b. Den ukjente friksjonskraften f på det rullende legemet angriper i legemets kontaktpunkt med skråplanet, og er rettet oppover langs skråplanet. Newtons 2.lov for translasjon langs skråplanet gir derfor

$$Mg\sin\theta - f = Ma.$$

Dreiemomentet relativt omdreiningsaksen til det rullende legemet er fR, der R er det rullende legemets radius. Tyngdekraften angriper i massemiddelpunktet som befinner seg på omdreinigsaksen og gir derfor ikke noe dreiemoment om denne. Derved blir Newtons 2.lov for rotasjon i dette tilfellet

$$fR = I_0\dot{\omega} = I_0 \cdot (a/R),$$

der rullebetingelsen $v = R\omega$ er brukt i siste ligning.

c. Newtons 2.lov for rotasjon skriver vi nå som

$$f = \frac{I_0}{R^2}a = \frac{\beta MR^2}{R^2}a = \beta Ma.$$

Dette brukes så til å eliminere f i Newtons 2. lov for translasjon:

$$Mg\sin\theta - \beta Ma = Ma.$$

Derved følger sluttresultatet for de to ukjente a og f som

$$a = g \cdot \frac{\sin\theta}{1+\beta} \quad ; \quad f = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot Mg\sin\theta.$$

Kommentarer: (i) f er proporsjonal med massen M, som derfor inngår i svaret. Formuleringen i oppgaveteksten er uheldig på dette punkt, den kan gi inntrykk av at M ikke skal inngå. (ii) Her har vi løst oppgaven ved å se på rotasjon rundt rotasjonsaksen. Dette gir to ligninger, en for translasjon og en for rotasjon, med to ukjente, f og a. Alternativt kunne vi studere rotasjon om kontaktpunktet med skråplanet. Om dette punktet bidrar ikke f med dreiemoment. Det gjør derimot tyngden, som gir dreiemomentet $MgR\sin\theta$. Treghetsmomentet om samme punkt er, ifølge Steiners sats, $I = I_0 + MR^2$. Derved gir Newtons 2.lov for rotasjon om kontaktpunktet, når rullebetingelsen brukes,

$$MgR\sin\theta = (I_0 + MR^2) \cdot \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \frac{\sin\theta}{1+\beta},$$

som før. Valg av (øyeblikkelig) omdreiningsakse er vårt, fysikken er likevel den samme, og det blir (naturligvis!) svaret også.