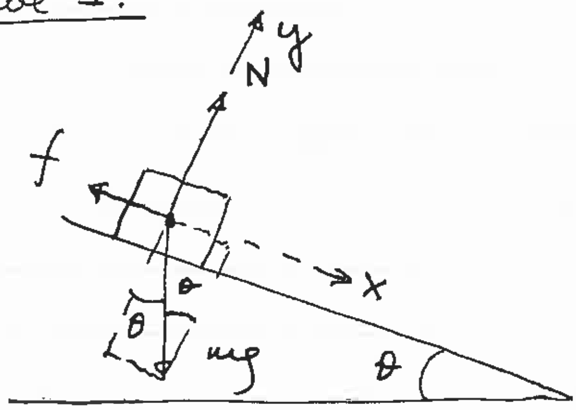
Løsningsforslag. Eksamen TFY4102 9. juni 2010.

Oppgave 1.

a)




Komponentvis analyse av kraftdiagrammet gir:

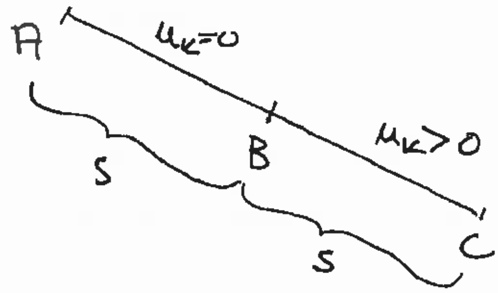
y-retn. : $N - mg\cos\vartheta = 0 \Rightarrow \underline{N = mg\cdot\cos\vartheta}$

x-retn. : $mg\sin\vartheta - f = ma_x$

Friksjonskraften $f = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg \cdot \cos\vartheta$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_x}} = \frac{1}{m}\left[mg\sin\vartheta - \mu_k mg\cos\vartheta\right] = \underline{\underline{g(\sin\vartheta - \mu_k\cos\vartheta)}} \text{ q.e.d.}$$

b)




$v_A = 0$

$v_C = 0$

På AB : $a_x = g \cdot \sin\theta$ fordi $\mu_k = 0$

på BC : $a_x = g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)$ $\mu_k > 0$.

Bruker arbeid-energi teoremet på strekningen AC.

$$W_{other} = W_{friksjon} = \Delta E = E_C - E_A = K_C - K_A + U_C - U_A$$

$$K_A = K_C = 0 \qquad U_A - U_C = 2 \cdot s \cdot \sin\theta \cdot mg$$

$$W_{friksjon} = -f \cdot s$$ (friksjon bare på BC, ikke AB)

$$\Rightarrow \quad -\mu_k \cdot mg \cos\theta \cdot s = 0 - 0 - 2s \cdot \sin\theta \cdot mg$$

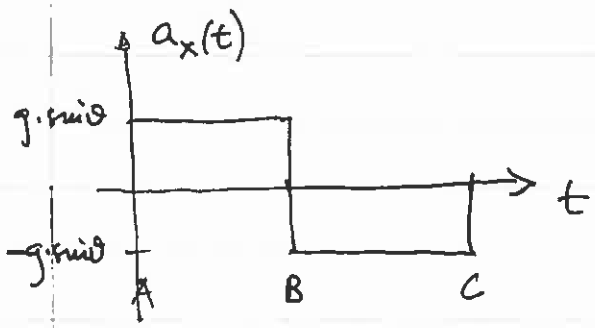
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_k}} = \frac{2 \sin\theta}{\cos\theta} = \underline{\underline{2 \cdot \tan\theta}}$$

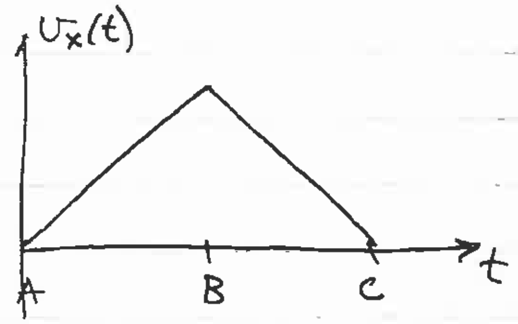
c) Med $\mu_k = 2 \cdot \tan\theta$ får vi:

på AB: $\underline{a_x = g \cdot \sin\theta = konst.}$ $v_x(t) = v_A + \int a_x \cdot dt = \underline{0} + \underline{(g \cdot \sin\theta) \, t}$

på BC: $\underline{a_x} = g\left(\sin\theta - 2 \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta\right) = \underline{-g \cdot \sin\theta}$ ; $v_x(t) = \underline{(-g \cdot \sin\theta) \cdot t}$

Grafer:



d) $m = 2{,}0\ \text{kg}$, $L = 10{,}0\ \text{m}$, $s = 0{,}2\ \text{m}$, $\theta = 30°$

Omgivelsestemperatur $T = 20°\text{C}$ (konstant).

i) Endring i kinetisk energi: $\underline{\underline{\Delta K = 0}}$

fordi hastigheten er null både i begynnelsen og slutten av bevegelsen, siden klossen går et <u>like</u> antall striper $\underline{N} = \frac{L}{s} = \frac{10\,\text{m}}{0.2\,\text{m}} = \underline{50}$ og derfor til slutt stopper i enden av et friksjonsfelt.

ii) Endring i potensiell energi: $\Delta U = U_B - U_A$

$$\underline{\Delta U} = mg\left(0 - L\cdot\sin\theta\right) = \underline{-mgL\sin\theta}$$

$$\underline{\underline{\Delta U}} = -\,2{,}0\,\text{kg}\cdot 10{,}0\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot\sin 30° = \underline{\underline{-98{,}1\ \text{J}}}$$

iii) Endring i mekanisk energi:

$$\underline{\underline{\Delta E}} = \Delta(K+U) = \Delta K + \Delta U = \underline{-mgL\sin\theta} = \underline{\underline{-98{,}1\ \text{J}}}$$

iv) Endringen i entropi i universet er gitt ved at den utviklede friksjonsvarmen $\Delta Q = |\Delta E|$ overføres til omgivelsene som har konstant temperatur $T = 20°\text{C} = 293\,\text{K}$.

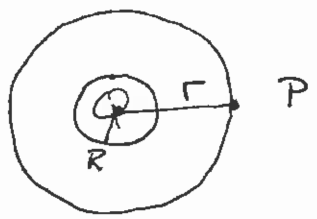
Det gir en entropiendring for universet:

$$\underline{\underline{\Delta S}} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{98{,}1\,\text{J}}{293\,\text{K}} = \underline{\underline{0{,}33\ \text{J/K}}}$$

## Oppgave 2.

a) Bruker Gauss lov til å bestemme feltet for to symmetriske systemer: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_0}$

i) Uniformt ladet kuleskall, med $r \geq R$. Totalladning $Q$.




Gaussflate som kuleflate gjennom punkt P i avstand r fra kuleskallets senter.

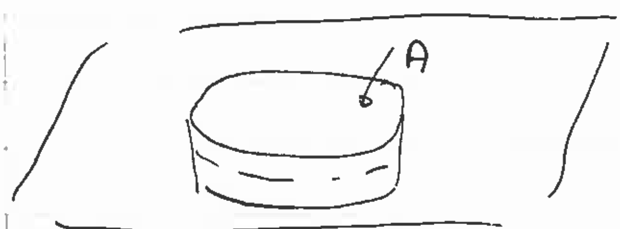
Av symmetrigrunner må feltet fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling være radielt rettet, og konstant for fast verdi av r.

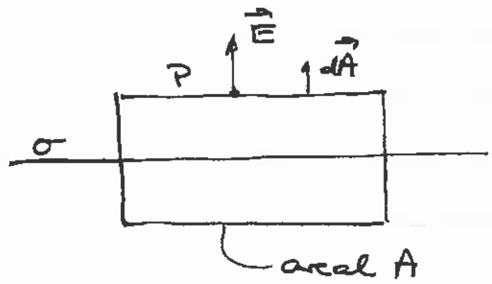
På Gauss-flaten er dermed: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og $|\vec{E}|$ konstant

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E\int dA = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r}} \qquad r \geq R \qquad \text{q.e.d.}$$

ii) Ladet plate med $\infty$ utstrekning. Ladningstetthet $\sigma$.




Velger sylindrisk Gaussflate med topp- og bunnflate parallell med det ladede planet.

For et uniformt ladet plan må av symmetrigrunner felt retningen være normalt på planet, og ha konstant verdi for en bestemt avstand fra planet.

På sylindersideflaten (av Gaussflaten) er $d\vec{A} \perp \vec{E}$, slik at $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.
På topp- og bunnflaten er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ slik at $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$. Dessuten er $|\vec{E}|$ konstant.

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{toppflate}} + \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\substack{\text{sideflate} \\ \text{av sylinder}}} + \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{bunnflate}}$$

$$= E \cdot A + 0 + E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}}} \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Superposisjonsprinsippet kan brukes til å beregne feltet i senter av hullet i kuleflata som:

$$\vec{E}_{\substack{\text{senter av} \\ \text{hull}}} = \vec{E}_{\substack{\text{hel kule-} \\ \text{flate}}} + \vec{E}_{\text{plugg}}$$

hvor plugg-flaten har motsatt like ladningstetthet som det som finnes på kuleflaten, dvs

$$\underline{\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}}$$

I hullet vil $\hat{n}$ for pluggflaten være parallell med $\hat{e}_r$, og vi regner at en plan flate kan representere pluggflaten hvis pluggen har liten overflate.

$$\Rightarrow \vec{E}_{hull} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{e}_r + \frac{1}{2}\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}_{hull} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{e}_r \text{ for } r = R}} \qquad \text{q.e.d.}$$

c) Pluggen settes tilbake i hullet, og det virker derved en elektrostatisk kraft på pluggen.
Antar at pluggen har overflateareal $A_p$, og samme ladningstetthet som kuleskallet forøvrig.
Elektrostatisk kraft på pluggen:

$$\underline{\vec{F}} = q_{plugg} \cdot \vec{E}_{hull} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi R^2} \cdot A_p \cdot \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{e}_r}}$$

Kan regne at pluggen ~~xxx~~ er sirkulær, med radius a:

$$\underline{\underline{\vec{F}}} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \pi a^2 \cdot \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{e}_r = \underline{\underline{\frac{Q^2 a^2}{32\pi\varepsilon_0 R^4}\hat{e}_r}}$$

"Elektrostatisk trykk" er $p = \frac{|\vec{F}|}{A_p}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p}} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \underline{\underline{\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}}}$$

d) Arbeid gjort av den elektrostatiske kraften ved utvidelse av kuleskallet (såpeboblen) fra $r=R=10\,cm$ til $R=\infty$

$$W = \int_{r=R}^{\infty} p \cdot dV \qquad \text{Kulesymmetri gir at } dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$\Rightarrow W = \int_{r=R=0{,}1m}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-0-\left(-\frac{1}{R}\right)\right] = \underline{\underline{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}}$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{(3\cdot 10^{-9}C)^2}{8\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}}\cdot\frac{1}{0{,}1m} = 0{,}40\cdot 10^{-6}\,Nm = \underline{\underline{0{,}40\,\mu J}}$$

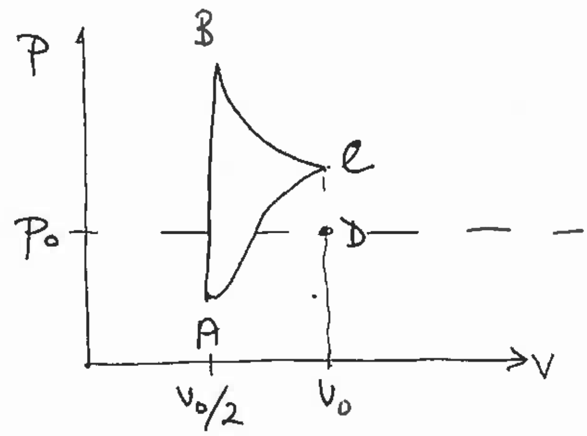
e) Den elektrostatiske energien som skal til for å samle ladninger $dq$ fra uendelig avstand til jevn fordeling på et kuleskall med radius $r=R$, og slik at total ladningen blir $Q$, er:

$$U = \int_{q=0}^{Q} V(R,q)\,dq = \int_{q=0}^{Q} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{q=0}^{Q} q\,dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{1}{2}\left[q^2\right]_0^Q$$

$$\underline{\underline{U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = W}}$$

Den elektrostatiske energien ved å samle ladningen på kuleskallet, tilsvarer arbeidet som gjøres når ladningen spres til uendelig avstand, hvilket var å forvente pga. energibevarelse.

# Oppgave 3.




For punktet D har vi gitt:
$p_0$, $V_0$, $T_0$.

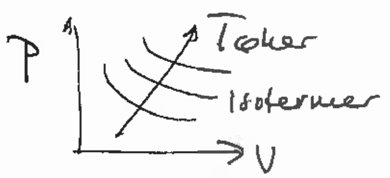
BC er isoterm ($T_B = T_C$)
AB er isokor. ($V_A = V_B$)

Prosesstrinn AC: $\quad p = p_0\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi V}{V_0}\right) + 1\right]$

Pkt A: $\quad \underline{p_A} = p_0\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi \frac{V_0}{2}}{V_0}\right) + 1\right] = p_0\left[\frac{1}{2}\cos\pi + 1\right] = p_0\left[-\frac{1}{2} + 1\right] = \underline{\underline{\frac{p_0}{2}}}$

Pkt C: $\quad \underline{p_C} = p_0\left[\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{V_0}{V_0}\right) + 1\right] = p_0\left[\frac{1}{2}\cdot\cos 2\pi + 1\right] = p_0\left[\frac{1}{2} + 1\right] = \underline{\underline{\frac{3p_0}{2}}}$

a) Bestemmer syklusens høyeste og laveste temperatur, $T_{varm}$ og $T_{kald}$.
Fra hvordan isotermer forelligger i et pV diagram




ser vi at $\underline{T_{varm} = T_B = T_C}$
$\underline{T_{kald} = T_A}$.

Bruker tilstandsligningen for ideell gass på tilstandene A og D:

$$\frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_D \cdot V_D}{T_D} \qquad p_D = p_0,\ V_D = V_0,\ T_D = T_0,\ V_A = \frac{V_0}{2},\ p_A = \frac{p_0}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_A}} = \frac{p_A V_A}{p_0 V_D}\cdot T_D = \frac{\frac{p_0}{2}\cdot\frac{V_0}{2}}{p_0 \cdot V_0}\cdot T_0 = \underline{\underline{\frac{1}{4}T_0 = T_{kald}}}$$

Tilstandsligning for tilstandene C og D:

$$\frac{p_C \cdot V_C}{T_C} = \frac{p_D \cdot V_D}{T_D}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_C}} = \frac{p_C V_C}{p_D V_D} \cdot T_D = \frac{\frac{3}{2} p_0 \cdot V_0}{p_0 \cdot V_0} \cdot T_0 = \underline{\underline{\frac{3}{2} T_0 = T_{varm}}}$$

Virkningsgrad for Carnotprosess:

$$\underline{\underline{e_{Carnot}}} = 1 - \frac{T_{kald}}{T_{varm}} = 1 - \frac{\frac{1}{4} T_0}{\frac{3}{2} T_0} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = \underline{\underline{0,83}}$$

b) Arbeid for hver av delprosessene :

Isoterm BC : $W_{BC} = \int_B^C p \cdot dV = \int_B^C \frac{nRT_{varm}}{V} \cdot dV$

$$W_{BC} = nRT_{varm} \left[ \ln V \right]_B^C = nRT_{varm} \cdot \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = nR \cdot \frac{3}{2} T_0 \cdot \ln\left(\frac{V_0}{V_0/2}\right)$$

Bestemmer n fra tilstandsligninga brukt på punkt D :

$$p_0 V_0 = nRT_0 \Rightarrow \underline{n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}}$$

$$\underline{\underline{W_{BC}}} = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \cdot R \cdot \frac{3}{2} T_0 \cdot \ln 2 = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot \ln 2}}.$$

$W_{BC} > 0$, dvs (arbeid utført av systemet)

Trinn CA : $W_{CA} = \int_C^A p \cdot dV$

Kurven for p i prosesstrinn CA er symmetrisk om gjennomsnittsverdien $\bar{p} = p_0$

$$\Rightarrow \underline{W_{CA}} = \bar{p}(V_A - V_C) = p_0\left(\frac{V_0}{2} - V_0\right) = \underline{-\frac{1}{2}p_0V_0}$$

$W_{CA}$ er arbeid utført på systemet, siden $W_{CA} < 0$.

Alternativt kunne vi regne ut

$$W_{CA} = \int_C^A p \cdot dV = \int_C^A p_0\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi V}{V_0}\right) + 1\right] \cdot dV = p_0 \frac{1}{2}\sin\left[\frac{2\pi V}{V_0}\right]\Bigg|_{V_C}^{V_A} \cdot \frac{V_0}{2\pi}$$

$$+ \; p_0 \cdot V\Big|_{V_C}^{V_A}$$

$$= \frac{1}{2}p_0 \cdot \frac{V_0}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi\frac{V_0/2}{V_0}\right) - \sin\left(2\pi\frac{V_0}{V_0}\right)\right] + p_0\left[\frac{V_0}{2} - V_0\right]$$

$$= \frac{1}{2}p_0\frac{V_0}{2\pi}\left[\sin\pi - \sin 2\pi\right] + \left(-\frac{p_0V_0}{2}\right)$$

$$\underline{W_{CA}} \quad \frac{1}{2}p_0\frac{V_0}{2\pi}\left[0 - 0\right] - \frac{p_0V_0}{2} = \underline{-\frac{1}{2}p_0V_0}$$

Trinn AC er en isokor prosess $V_A = V_B \Rightarrow \underline{W_{AB} = 0}$

Totalarbeidet:

$$W_{TOT} = W_{BC} + W_{CA} + W_{AC} = \frac{3}{2}p_0V_0 \cdot \ln 2 - \frac{1}{2}p_0V_0 + 0$$

$$\underline{W_{TOT} = \left(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right)p_0V_0 > 0}$$ ⇒ netto arbeid utført av systemet

c) Varmeovertføringen i hvert trinn og for syklusen

Termodynamikkens 1. lov : $Q = \Delta U + W$
dessuten for ideell gass $\Delta U = n C_V \cdot \Delta T$

For kretsprosess er $\Delta U = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q_{ut} = W_{ut} = \frac{p_0 V_0}{2}(3\ln 2 - 1)}}$

BC er isoterm dvs $\Delta T = 0$ og $\Delta U = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{Q_{BC}}} = W_{BC} = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot \ln 2}}$.

$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA} = n C_V \cdot [T_A - T_C] + (-\frac{1}{2} p_0 V_0)$

$Q_{CA} = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \cdot \frac{3}{2} R \left[\frac{1}{4} T_0 - \frac{3}{2} T_0\right] - \frac{1}{2} p_0 V_0 = p_0 V_0 \left[-\frac{15}{8} - \frac{1}{2}\right]$

$\underline{\underline{Q_{CA}}} = \underline{\underline{-\frac{19}{8} p_0 V_0}}$

$Q_{AB} = \Delta U + \underbrace{W_{AB}}_{=0} = n C_V (T_B - T_A) = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \cdot \frac{3}{2} R \left(\frac{3}{2} T_0 - \frac{1}{4} T_0\right)$

$\underline{\underline{Q_{AB}}} = \underline{\underline{\frac{15}{8} p_0 V_0}}$

$Q_{TOT} = Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot \ln 2 - \frac{19}{8} p_0 V_0 + \frac{15}{8} p_0 V_0$

$\underline{\underline{Q_{TOT}}} = \underline{\underline{\left(\frac{3}{2} \cdot \ln 2 - \frac{1}{2}\right) p_0 V_0}} = \underline{\underline{Q_{ut} = W_{ut}}}$ q.e.d.

d) "$Q_{varm}$" er tilført varme ($>0$) dvs.

$$"Q_{varm}" = Q_{BC} + Q_{AB} = \frac{p_0V_0}{2}\left(3\ln 2 + \frac{15}{4}\right)$$

Varmekraftmaskinens virkningsgrad er:

$$e = \frac{W_{TOT}}{Q_{varm}} = \frac{\frac{p_0V_0}{2}(3\ln 2 - 1)}{\frac{p_0V_0}{2}\left(3\ln 2 + \frac{15}{4}\right)} = \frac{2{,}08-1}{2{,}08+3{,}75} = 0{,}18$$

## Oppgave 4.

| Spørsm. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Svar | C | E | C | E | D | B | C | D | C | A |