NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Johan S. Høye/Professor Asle Sudbø
Telefon: 91839082/40485727

Eksamen i TFY4106 FYSIKK

Tirsdag 18. desember 2007
09:00–13:00

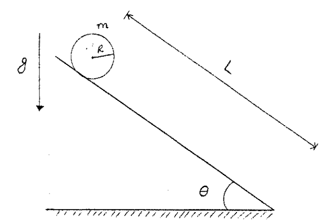
Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til NTNU liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*
Vedlegg: Formelliste for faget TFY4106 Fysikk høsten 2007.

Dette oppgavesettet er på 5 sider.

Sensurfrist: 18.januar.
(Hver av oppgavene 1, 2, 3 og 4 teller like mye.)

Oppgave 1. Mekanikk



Et legeme med masse m og radius R ruller uten å skli på et skråplan med lengde L som danner en vinkel θ med horisontalplanet (se figur). Legemets treghetsmoment for dreining rundt rotasjonsaksen når det ruller, er oppgitt å være $I = \beta m R^2$. Et tyngdefelt virker loddrett nedover (se figur).

a) Når legemet ruller uten å skli vil det få en vinkelakselerasjon α på grunn av en friksjonskraft F mellom dette og skråplanet. Sett opp likninger som bestemmer α, F og akselerasjonen a til legemet. Løs likningene og finn så legemets akselerasjon a nedover skråplanet uttrykt ved β, θ og tyngdens akselerasjon g.

b) Legemet oppgis å være en sylinder med lengde l og masse pr. volumenhet $\rho(r) = Ar$ når $0 < r < R$. Bestem massen m uttrykt ved A, l og R. [Hint: Finn først volumet dV av et sylinderskall av lengde l mellom radiene r og $r + dr$, og finn deretter massen dm inneholdt i dette kuleskallet.]

Bestem deretter treghetsmomentet I og med det β.

Oppgave 2. Svingninger og bølger

Den endimensjonale bølgeligningen for utsvinget av en fysisk størrelse $y(x,t)$ fra en likevektsverdi er gitt ved

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

der c er hastigheten til bølgen.

a) Vis at funksjonen $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ er en løsning av bølgeligningen. Her er k bølgetallet og ω er vinkelfrekvensen til svingningen. Finn derved også sammenhengen mellom k, ω og c.

b) La $y(x,t)$ representere det transversale utsvinget til en streng av lengde L. Strengen er fastspent i en ende og er fri til å bevege seg transversalt i den andre ved at strengen er festet i en masseløs ring som glir friksjonsløst på en stang som er parallell til det transversale utsvinget. Dette innebærer at grensebetingelsene på utsvinget er gitt ved

$$\begin{aligned} y(x=0,t) &= 0, \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned}$$

[Dette er samme grensebetingelser som for en orgelpipe som er åpen i den ene enden og er lukket i den andre.] For å oppfylle grensebetingelsene vil det dannes en stående bølge $y = A(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t))$. Finn med dette de mulige tillatte verdier på k for svingninger av denne strengen.

Finn også bølgelengden λ til en svingning som er slik at 2 punkter (inklusive det ene endepunktet) på strengen alltid ligger i ro.

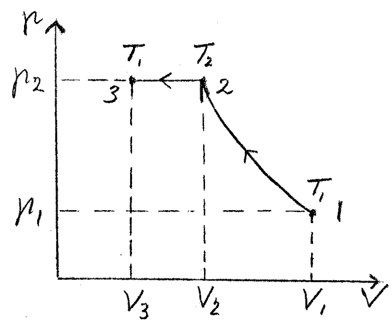
Oppgitt: $\sin u + \sin v = 2\sin((u+v)/2)\cos((u-v)/2)$, $k = 2\pi/\lambda$

Oppgave 3. Termisk fysikk

a) En tømmervegg av tre har midlere tykkelse 15 cm. Arealet til veggen er 60 m^2. Anta at temperaturen på innersiden av veggen er 20^{o}C mens den på yttersiden er 8^{o}C. Hva er den totale varmestrømmen I gjennom veggen (ved stasjonære forhold) når varmeledningsevnen for tre er $\lambda = 0,080\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$?

For å isolere veggen bedre legges det et 5 cm tykt lag med mineralull på denne. Mineralull har varmeledningsevnen 0,040 W/(m·K). Betrakt så situasjonen der varmestrømmen I er uendret. Hva er da temperaturen T_y på yttersiden av veggen dersom temperaturen på innersiden er uendret?

b)



En ideell gass med adiabatkonstant $\gamma = 1,4$ komprimeres adiabatisk fra trykket p_1 til trykket p_2 mellom punktene 1 og 2 på figuren. Deretter avkjøles gassen ved konstant trykk p_2 til punkt 3 der temperaturen er tilbake til starttemperaturen $T_1 = 290\,\mathrm{K}$ i punkt 1.

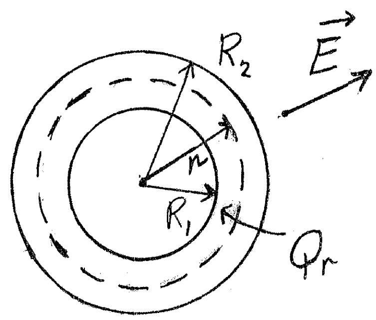
Hva er volumene V_2 og V_3 i henholdsvis punktene 2 og 3 når startvolumet i punkt 1 er $V_1 = 24\,\mathrm{dm}^3$ og forholdet $p_2/p_1 = 3,0$?

Hva blir temperaturen T_2 etter den adiabatiske kompresjonen?

Oppgitt: $I = \lambda A \dfrac{\Delta T}{\Delta x}$.

Oppgave 4. Elektrisitet og magnetisme

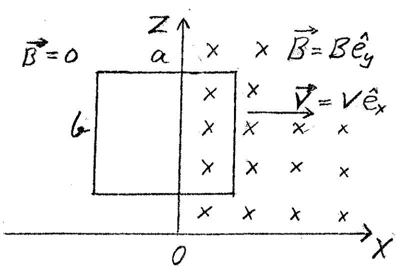
a)



Ei kule med ytre radius R_2 og indre radius R_1 har en elektrisk ladning Q. Denne ladningen er jevnt fordelt mellom disse radiene. (Dvs. ladning pr. volumenhet er konstant.) Betrakt ei tenkt kuleflate i avstand r fra sentrum. Hvor stor ladning Q_r ligger innenfor radien r ($R_1 < r < R_2$)?

Benytt Gauss lov til å bestemme det elektriske feltet $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$ i en vilkårlig avstand r fra sentrum av kuleflatene (dvs. betrakt de tre tilfellene $r \leq R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 \leq r$).

b)



Et magnetfelt $\mathbf{B}$ er rettet i y-retningen inn i papirplanet som vist på figuren. For x-koordinaten $x > 0$ er magnetfeltet av konstant styrke B mens for $x < 0$ er det ikke noe magnetfelt, dvs. $\mathbf{B} = 0$. En rektangulær strømsløyfe med sidekanter av henholdsvis lengde a og lengde b, som vist på figuren, beveger seg i x-retningen med hastigheten v. Posisjonen til høyre sidekant (av lengde b) er da gitt ved $x = vt$ der t er tiden. Ved denne bevegelsen vil det induseres en elektromotorisk spenning $\mathcal{E}$. Beregn denne spenningen $\mathcal{E}$ som funksjon av tiden. [Hint: Bestem først magnetisk fluks gjennom sløyfen.]

$$\text{Oppgitt:} \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{A}, \quad V = 4\pi R^3/3 \quad \text{(volum av kule)}.$$

Vedlegg: Eksamen i fag TFY4106 Fysikk den 18. desember 2007

Formelliste for faget TFY4106 Fysikk høsten 2007

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.
Symbolbruk er for det meste som i forelesninger og kompendium.

Fysiske konstanter:

$g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad N_A = 6,02\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ $\quad k_B = 1,38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ $\quad R = N_A k_B = 8,31\,\mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$

$1\,\mathrm{atm} = 101,3\,\mathrm{kPa}$ $\quad 0\,^\circ\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$ $\quad \sigma = 5,67\cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ $\quad h = 6,63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

$\epsilon_0 = 8,85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$ $\quad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ $\quad e = 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ $\quad m_e = 9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

Elementær mekanikk:

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r},t)$ med $\vec{p}(\vec{r},t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ $\quad \vec{F} = m\vec{a}$ $\quad$ Konstant a: $v = v_0 + at$ $\quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ $\quad$ Kinetisk energi $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ $\quad V(\vec{r})$ = potensiell energi (f.eks. tyngde: mgh, fjær: $\frac{1}{2}kx^2$)

$F_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}V(x,y,z)$ $\quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r})$ + friksjonsarbeide = konstant

$|F_f| = \mu_s\cdot F_\perp$ $\quad |F_f| = \mu_k\cdot F_\perp$ $\quad \vec{F}_f = -k_f\vec{v}$

Dreiemoment $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ $\quad \mathrm{d}W = |\vec{\tau}|\,\mathrm{d}\alpha$ $\quad$ Statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$ $\quad \Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$

Massefellespunkt: $\vec{R}_M = \dfrac{m_A}{M}\vec{r}_A + \dfrac{m_B}{M}\vec{r}_B$ $\quad$ Relativ koordinat: $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

Elastisk støt: $\vec{p}$ = konstant $\quad W_k$ = konstant $\quad$ Uelastisk støt: $\vec{p}$ = konstant

Vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_z$ $\quad |\vec{\omega}| = \omega = \dot{\theta}$ $\quad$ Vinkelakselerasjon $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ $\quad \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}$

$v = r\omega$ $\quad$ Sentripetalaksel. $a_r = -v\omega = -\dfrac{v^2}{r} = -\omega^2 r$ $\quad$ Baneaksel. $a_\theta = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha$

Kinetisk energi $W_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ $\quad$ der treghetsmoment $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{d}m$

Massiv kule: $I_T = \frac{2}{5}MR^2$ $\quad$ Ring: $I_T = MR^2$ $\quad$ Sylinder/skive: $I_T = \frac{1}{2}MR^2$ $\quad$ Kuleskall: $I_T = \frac{2}{3}MR^2$

Lang, tynn stav: $I_T = \frac{1}{12}M\ell^2$ $\quad$ Parallellakseteoremet: $I = I_T + MR_T^2$

Dreieimpuls (rotasjonsmengde) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ $\quad \vec{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$ $\quad$ Stive legemer: $\vec{L} = I\cdot\vec{\omega}$ $\quad \vec{\tau} = I\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

Hookes lov: $F = -kx$ $\quad T = \dfrac{F}{A} = E\epsilon = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$ $\quad T = \mu\gamma = \mu\dfrac{\Delta x}{y}$ $\quad \Delta p = -B\dfrac{\Delta V}{V}$ $\quad \tau = \dfrac{\pi}{32}\mu\dfrac{D^4}{\ell}\theta$

Skjærspenning og viskositet: $T = \dfrac{F}{A} = \eta\dfrac{v}{b}$

Svingninger og bølger:

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$ eller $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\quad \delta = \dfrac{1}{2}\dfrac{b}{m}$

$\delta < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \theta_0)$ $\quad \omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\delta > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+\mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^-\mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t}$ $\quad \alpha^{(\pm)} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0\cos\omega t$ når t er stor: $x(t) = x_0\cos(\omega t + \phi)$, der $x_0(\omega) = \dfrac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$

Bølger: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\quad y(x,t) = f(x \pm vt)$ $\quad y(x,t) = y_0\cos(kx)\cos(\omega t)$ $\quad y(x,t) = y_0\cos(kx \pm \omega t)$

$v = \pm\dfrac{\omega}{k}$ $\quad |v| = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f$ $\quad v_\mathrm{g} = \dfrac{\partial\omega}{\partial k}$ $\quad$ Streng: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ hvor $T = \dfrac{F}{A}$ og $\mu = \rho A = \dfrac{\Delta m}{\Delta\ell}$

Lydbølger: $\xi(x,t) = \xi_0\cos(kx \pm \omega t)$ $\quad p_\mathrm{lyd} = kv^2\rho\xi_0$ $\quad$ Luft: $v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{\gamma k_\mathrm{B}T}{m}}$ $\quad$ Fast stoff: $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

$P = \dfrac{1}{2}\mu v\omega^2 y_0^2$ $\quad I = \dfrac{P}{A} = \dfrac{1}{2}\rho\, v\,\omega^2\xi_0^2$ $\quad I = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_\mathrm{lyd}^2}{\rho v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_\mathrm{lyd}^2}{\sqrt{\rho B}}$

$\beta(\text{i dB}) = 10\,\log_{10}\dfrac{I}{I_\mathrm{min}}$ $\quad$ der $I_\mathrm{min} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$

Stående bølger: $y(t) = \dfrac{1}{2}y_0\cos[kx + \omega t] + \dfrac{1}{2}y_0\cos[kx - \omega t]$ $\quad L = n\,\dfrac{\lambda}{2}$ $\quad f_n = n\,\dfrac{v}{2L}$

Termisk fysikk:

n_M (iblant også n) = antall mol $\quad N$ = antall molekyler $\quad n = N/V$ $\quad n_\mathrm{f}$ = antall frihetsgrader

$\alpha = \dfrac{1}{\ell}\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}T}$ $\quad \Delta U = Q - W$ $\quad C = \dfrac{Q}{\Delta T} = mc = n_\mathrm{M}c' = Nc_\mathrm{m}$

Varmetransport: $j_\mathrm{Q} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A} = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$ $\quad j = \sigma T^4$ $\quad j = e\,\sigma T^4$ $\quad j_\nu(\nu, T) = \dfrac{2\pi h\nu^3}{c^2}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/k_\mathrm{B}T} - 1}$

$pV = n_\mathrm{M}RT$ $\quad pV = N\dfrac{2}{3}E$ $\quad E = \dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ $\quad$ van der Waals: $\left(p + \dfrac{a}{v_\mathrm{M}^2}\right)(v_\mathrm{M} - b) = RT$

$c_V' = \dfrac{1}{2}n_\mathrm{f}R$ $\quad c_p' = \dfrac{1}{2}(n_\mathrm{f} + 2)R = c_V' + R$ $\quad \Delta W = p\Delta V$ $\quad W = \displaystyle\int_1^2 p\mathrm{d}V$ $\quad \mathrm{d}U = C_V\cdot\mathrm{d}T$

$\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{n_\mathrm{f} + 2}{n_\mathrm{f}}$ $\quad pV^\gamma = \text{konstant}$ $\quad TV^{\gamma-1} = \text{konstant}$ $\quad p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{konstant}$ $\quad v_\mathrm{lyd} = \sqrt{\dfrac{\gamma k_\mathrm{B}T}{m}}$

Molekylære kollisjoner: $\sigma = \pi\,d^2$ $\quad \ell_0 = \dfrac{1}{n\sigma}$ $\quad \tau = \dfrac{1}{nv\sigma}$

Effektivitet (virkningsgrad/kjølefaktor): $e = \dfrac{W}{Q_\mathrm{H}} \xrightarrow{\text{Carnot}} 1 - \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H}}$ $\quad$ Otto: $e = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}$

$K = \left|\dfrac{Q_\mathrm{L}}{W}\right| \xrightarrow{\text{Carnot}} \dfrac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}}$ $\quad \epsilon = \left|\dfrac{Q_\mathrm{H}}{W}\right| \xrightarrow{\text{Carnot}} \dfrac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}}$ $\quad$ Clausius: $\sum\dfrac{\Delta Q}{T} \le 0$ $\quad \displaystyle\oint\dfrac{\mathrm{d}Q}{T} \le 0$

Entropi: $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q_\mathrm{rev}}{T}$ $\quad \Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \displaystyle\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}Q_\mathrm{rev}}{T}$ $\quad S = k_\mathrm{B}\ln w$

Elektrisitet og magnetisme:

Coulombs lov: $\vec{F}(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ Coulomb potensialet: $V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$

Gauss lov: $Q = \sum q_i = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{dA}$

Kapasitans: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Q^2/C$ $\frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

Kraft på strømleder: $\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$ Lorentzkraften: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Kraft mellom to ledere: $F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 l}{r}$ Biot-Savarts lov: $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$

Amperes lov: $\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I$ Magnetisk fluks: $\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot \vec{dA}$

Faradays induksjonslov: $V_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ Selvinduksjon: $V_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$ $\frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Maxwells ligninger: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \vec{B} = \mu_0[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}]$ $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$