LØYSINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I TFY4108 FYSIKK, 14/12 - 2012

Oppgave 1:

(a) Tidsuavhengig Schr. likn. inne i brønnen: $(0 < x < L)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}(-1)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}}$$ er grunntilstandsenergien

(b) Sannsynstettleiken er $|\psi(x)|^2$

$\Rightarrow$ sannsynet er

$$\int_{L/4}^{3L/4} dx\, |\psi(x)|^2 = \frac{2}{L}\int_{L/4}^{3L/4} dx\, \sin^2\frac{\pi x}{L}$$

$y \equiv \frac{\pi x}{L}$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{2}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} dy\, \sin^2 y = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left(y - \sin y\cos y\right)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + 1\right] \ (\simeq 0.82)}}$$

(c) (i) $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$

Sannsynstettleiken $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L}$ i brønnen er symmetrisk om $x = L/2 \Rightarrow \langle x \rangle = L/2$

(ii) $\langle p \rangle = 0$

Sidan tilstanden er stasjonær er $\langle p \rangle$ tidsuavhengig. Veit også at partikkelen må vere innanfor eit begrensa område $0 < x < L$. Å ha $\langle p \rangle \neq 0$ (dvs. $\langle p \rangle > 0$ eller $\langle p \rangle < 0$) er ikkje foreinleg med desse eigenskapane. Dermed må $\langle p \rangle = 0$.

Alternativt:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$= \underbrace{-i\hbar}_{\text{imaginær}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)}_{\text{reell sidan } \psi^*(x) = \psi(x)} = iC \text{ med } C \text{ reell}$$

Men $\langle p \rangle$ må vere reell sidan bevegelsesmengd er en fysisk observabel. Dermed må C vere $0 \Rightarrow \langle p \rangle = 0$

(Det er nok å gi eitt svar på enten (i) eller (ii))

(d) $$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\ x^2\ \psi(x)$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L dx\ x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^{\pi} dy\ y^2 \sin^2 y$$

Integralet er $\int_0^{\pi} dy\ y^2 \sin^2 y$

$$= \frac{1}{24}\left[4y^3 + (3-6y^2)\sin 2y - 6y\cos 2y\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{24}\left[4\pi^3 + 0 - 6\pi \cdot 1 - (0+0-0)\right]$$

$$= \frac{\pi^3}{6}\left[1 - \frac{3}{2\pi^2}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\langle x^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)}}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x)$$

$$= -\hbar^2 \frac{2}{L}\int_0^L dx\ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2} \cdot \underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L dx\ \sin^2\frac{\pi x}{L}}_{=\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1} = \underline{\underline{\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2}}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x^2\rangle} = \sqrt{L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right) - L^2\frac{1}{4}}$$

$$= L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2} - 0} = \frac{\pi\hbar}{L}$$

(e) $$\Delta x\,\Delta p = L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}}\,\frac{\pi\hbar}{L} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}\cdot\hbar$$

$$\simeq 0.568\,\hbar$$

Heisenbergs uvisserelasjon seier at $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$
Vi ser at den er tilfredsstilt.

Oppgave 2.

(a) Krafta gitt av Newtons 2. lov:

$$F_x = m a_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\left(-\frac{b}{m}\right)v_x = -b v_x$$

Gjenkjenner dette som en vanlig type friksjonskraft ($|F|$ prop. med $|v|$, F og v motsatt retta (med $b>0$)). b er da simpelthen koeffisienten som gir eit mål på friksjonen (større b gir større friksjon for same v).

(b) $x(t) = \int_0^t v_x(t')\,dt'$ (dvs. $x(0)=0$)

$$= v_0 \int_0^t e^{-bt'/m}\,dt' = -\frac{m}{b} v_0 \left(e^{-bt/m} - 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{mv_0}{b}\left[1 - e^{-bt/m}\right]}}$$

Partikkelen trengje inn til posisjonen
$\underline{\underline{x(t=\infty) = mv_0/b}}$

Oppgåve 3

(a) E_k er ikkje bevart i kollisjonen fordi den er uelastisk. $\vec{p}$ er bevart fordi det virkar ingen ytre netto krefter på skivene.

(b) Bevaring av bevegelsesmengd gir

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$ (forkorta felles masse m)

Kvadrering gir $v_1^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$

Endringa i kinetisk translasjonsenergi er
$\Delta E_k^{trans} = E_k^{trans}(\text{etter}) - E_k^{trans}(\text{før})$
$$= \left[\frac{1}{2} m (v_1')^2 + \frac{1}{2} m (v_2')^2\right] - \frac{1}{2} m v_1^2$$
$$= -m\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = \underline{\underline{-m v_1' v_2' \cos\theta}}$$

som kan vere positiv, negativ, eller null avh. av θ. Sidan E_k minkar i kollisjonen (dvs. $\Delta E_k < 0$) er vi avhengig av kinetisk rotasjonsenergi E_k^{rot} før kollisjonen for at kinetisk translasjonsenergi skal kunne auke.
$(E_k = E_k^{trans} + E_k^{rot})$

Oppgåve 4.

(a) I sklifasen verkar ei kinetisk friksjonskraft mot bevegelsen, med storleik $F_f = \mu_k N = \mu_k mg$ (N er normalkrafta). Newtons 2 lov gir akselerasjonen

$$a = -\frac{F_f}{m} = -\mu_k g$$

Hastigheiten: $v \overset{\text{a konstant}}{=} v_0 + at = v_0 - \mu_k g t$

(b) Verken tyngda eller normalkrafta gir kraftmoment. Newtons 2 lov for rotasjon gir

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{F_f r}{I} = \frac{\mu_k \cancel{m} g \cancel{r}}{\frac{2}{5}\cancel{m} r^{\cancel{2}}} = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$$

Rotasjonshastigheiten: $\omega_z \overset{\alpha_z \text{ konstant}}{=} \omega_0 + \alpha_z t$
$= 0 + \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r} t = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r} t$

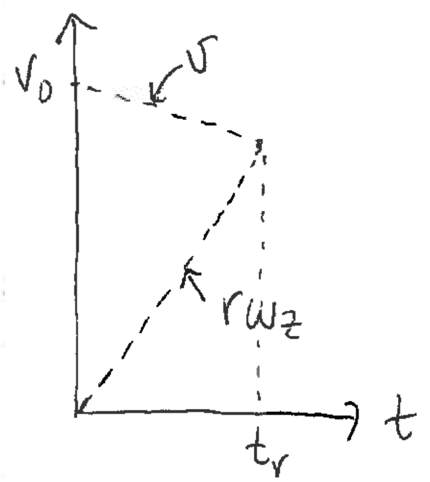
initialrotasjonshast. $= 0$ her

(c) I sklifasen $(0 < t < t_r)$:

$v = v_0 - \mu_k g t$

$r\omega_z = (5/2)\mu_k g t$

Skjematisk:



Rein rulling oppstår ved tida t_r der

$v = r\omega_z$ (rullevilkåret)

Set inn : $v_0 - \mu_k g t_r = \frac{5}{2}\mu_k g t_r$

$$\Rightarrow \quad t_r = \frac{v_0}{\left(\frac{5}{2}+1\right)\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_k g}}}$$

$$x_r = x_0 + v_0 t_r + \frac{1}{2} a t_r^2$$

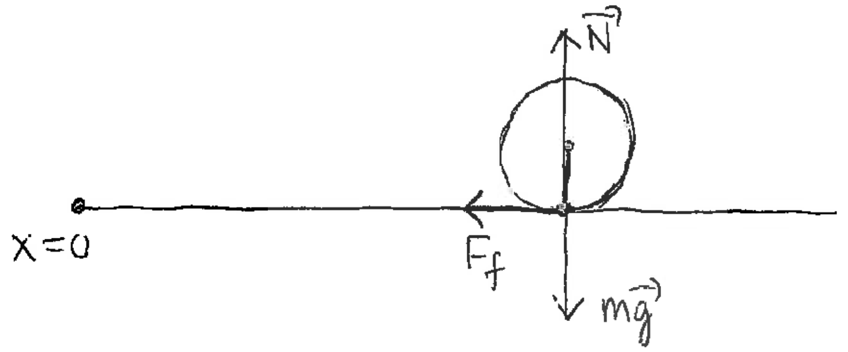
$$= 0 + v_0 \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_k g} + \frac{1}{2}(-\mu_k g)\left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{v_0^2}{(\mu_k g)^2}$$

$$= \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{49}\right)\frac{v_0^2}{\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_k g}}}$$

$$v_r = v_0 - \mu_k g t_r = v_0 - \mu_k g \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{5}{7}v_0}}$$

(Alternativt kunne ein t.d. ha funne v_r først og så brukt $v_r^2 - v_0^2 = 2a x_r$ for å finne x_r.)

(d)



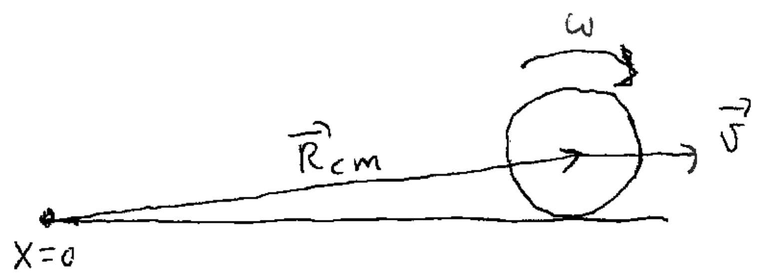
Kreftene på kula er $\vec{N}$ (normalkraft), $m\vec{g}$ (tyngdekraft) og (i sklifasen) friksjonskraften $\vec{F_f}$.

Bidraga frå $\vec{N}$ og $m\vec{g}$ til kraftmomentet $\vec{\tau}$ om $x=0$ kansellerer fordi $\vec{N}=-m\vec{g}$ (sidan null akselerasjon i vertikal retning) og dei to kreftene har same arm.

Bidraget frå $\vec{F_f}$ til $\vec{\tau}$ er ~~også~~ null fordi armen til $\vec{F_f}$ er null sidan avstandsvektoren frå ref. pkt. til angrepspkt er $\parallel$ med $\vec{F_f}$. Dermed er $\vec{\tau}=0$.

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ bevart}$$

(e)



$$\vec{L} = \vec{R}_{cm} \times m\vec{v} + I\vec{\omega} \qquad \left(I = \frac{2}{5} m r^2\right)$$

peikar langs $\hat{z}$

Spinnbevaring $\Rightarrow$ $L_z(0) = L_z(x)$

$$L_z(0) = rmv_0 + 0 = rmv_0$$

$$L_z(x) = rmv + I\omega$$

$$\Rightarrow \quad rmv_0 = rmv + I\omega$$

v_r kan finnast vha rulle vilkåret
$v = r\omega$

$$\Rightarrow \quad rmv_0 = rmv_r + I\frac{v_r}{r}$$

$$= rmv_r + \frac{2}{5}mr^2\frac{v_r}{r} = \frac{7}{5}mrv_r$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_r = \frac{5}{7}v_0}}$$

Oppg. 5

(a) Bruker bevaring av energi. Tyngdepunktet har falle ei høgd $h = L/2$ og potensiell energi mgh er overført til kinetisk rotasjonsenergi $\frac{1}{2} I \omega^2$

$$\Rightarrow \quad Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3g}{L}}}}$$

(b) Kraftmomentet er gitt av tyngdekrafta med arm $L/2$. Dermed (Newtons 2. lov for rotasjon)

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg \cdot L/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}}$$