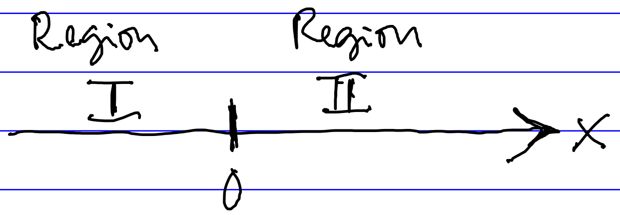
Løysingsforslag, kont. eksamen TFY4108, aug. 2013

1. (a) TUSL: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(E-U(x))}_{>0}\psi$$



$x \leq 0$: Region I: $U(x) = 0$

$$\Rightarrow \psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$x > 0$: Region II: $U(x) = -U_0$

$$\Rightarrow \psi_{II}(x) = C e^{iqx} + D e^{-iqx}$$

$$q = \sqrt{2m(E+U_0)/\hbar^2}$$

Skøyting ved $x = 0$:

Kontinuitet av ψ: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

$$\Rightarrow A + B = C + D$$

Kontinuitet av ψ': $\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0)$

$$\Rightarrow k(A-B) = q(C-D)$$

(b) Planbølgje inn frå venstre $\Rightarrow$ inga reflektert bølgje i region II $\Rightarrow$ $D = 0$

Finn $R = |B/A|^2$:

$$A + B = C$$

$$k(A - B) = qC \Rightarrow A - B = \frac{q}{k} C$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q}{k}\right) C$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q}{k}\right) C$$

$$\Rightarrow \quad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+U_0}}\right)^2$$

$$T = 1 - R$$

Med $U_0 \to 0$ får vi inga potensialendring

$\Rightarrow$ $R \to 0$, $T \to 1$, dvs. partikkelen

uforstyrra av potensialet : rimeleg

(c) Sidan $E > 0$ er $E > U(x)$ overalt. Klassisk får ein då ingen refleksjon, dvs. $R = 0$, $T = 1$ (partikkelen sin hastigheit aukar til og med i region II, sidan $\frac{1}{2} m v^2 + U(x) = E$)

(d) $R = T$ og $R = 1 - T \Rightarrow R = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{der } z \equiv \sqrt{1+\frac{U_0}{E}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad z-1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+1)$$

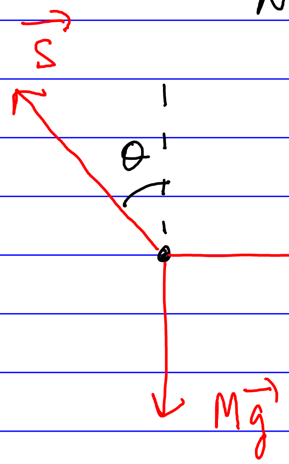
$$z = \frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{U_0}{E} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{E}{U_0} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - 1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4\sqrt{2}} \simeq 0.03}}$$

2. (a) Mekanisk likevekt $\Rightarrow$ bruker Newtons 1. lov (N1)

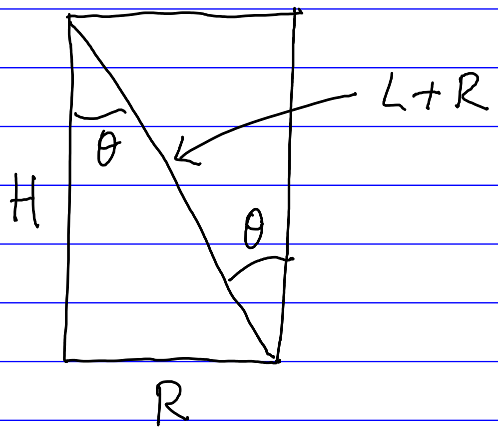


Horisontalt: $N = S \sin\theta$

Vertikalt: $Mg = S\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{Mg}{\cos\theta}, \quad N = Mg\tan\theta$$

Uttrykkjer θ vha. gjevne storleikar:



$$H^2 + R^2 = (L+R)^2$$

$$\Rightarrow \quad H^2 = (L+R)^2 - R^2$$

$$= L^2 + 2LR = L(L+2R)$$

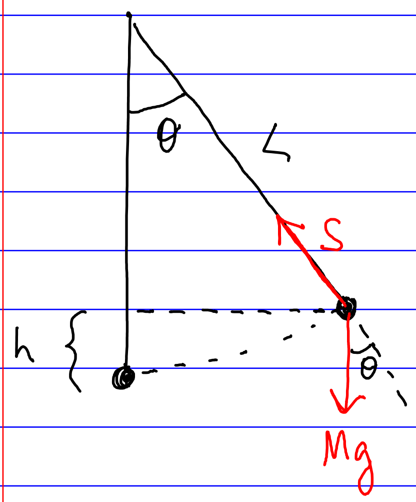
$$\cos\theta = \frac{H}{L+R}, \quad \tan\theta = \frac{R}{H}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S = Mg\frac{L+R}{\sqrt{L(L+2R)}}, \quad N = Mg\frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}}}}$$

$L \gg R \Rightarrow S \to Mg, \quad N \to 0$

Rimeleg at veggen blir uviktig i denne grensa.

(b)



N2 i radialretninga:

$$S - Mg\cos\theta = ma_{rad} = m\frac{v^2}{L}$$

Ved maks utslag er $v = 0$

$$\Rightarrow \quad S = Mg\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} = 1 - \frac{h}{L}$$

Kan bruke energibevaring for å finne h (fordi $\vec{S} \perp$ sirkelbana, så $\vec{S}$ gjer ikkje noko arbeid)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S = Mg\left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right)}}$$

3. (a) Dei einaste ytre kreftene på systemet (stav + kule) er krafta frå akslingen og tyngdekrafta. Krafta frå akslingen har null arm. Tyngdekrafta bidreg heller ikkje til noko kraftmoment om aksen fordi den er parallell med aksen. Dermed er kraftmomentet om aksen null ⇒ spinnet om aksen er bevart (sidan $\tau_z = dL_z/dt$).

(b) Spinnbevaring $\Rightarrow \frac{L}{2} mv = I\omega$

der $I = I_{stav} + I_{kule}$

$$= \frac{1}{12} ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(M + 3m)L^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mvL}{2I} = \underline{\underline{\frac{6mv}{(M+3m)L}}}$$

(c) $m \ll M \Rightarrow \omega \approx \frac{6mv}{ML}$

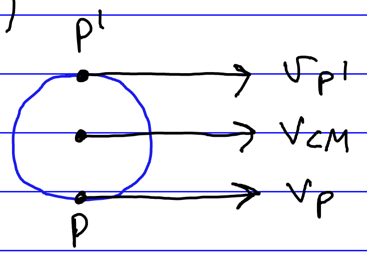
$$\Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{6mv}{ML}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} \frac{m^2 v^2}{M} = 3 \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

$$= \underline{\underline{3 \frac{m}{M} \cdot E_{k,kule} \ll E_{k,kule}}}$$

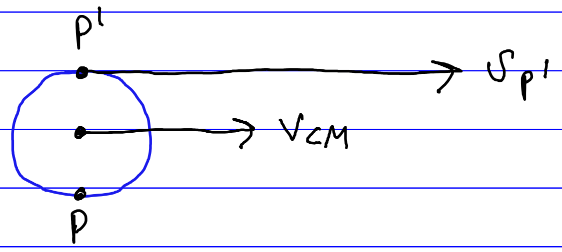
4. (a)

i.



$$v_P = v_{P'} = v_{CM}$$

ii.



$$v_P = 0, \quad v_{P'} = 2v_{CM}$$

(b) (definerer $a_{CM} \equiv a$, $v_{CM} \equiv v$)

i. Rein rulling $\Rightarrow$ mekanisk energi bevart

$\Rightarrow$ v konstant pga. null høgdeendring

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a = 0}}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha \overset{\text{rein rulling}}{=} \dfrac{a}{R} = 0$

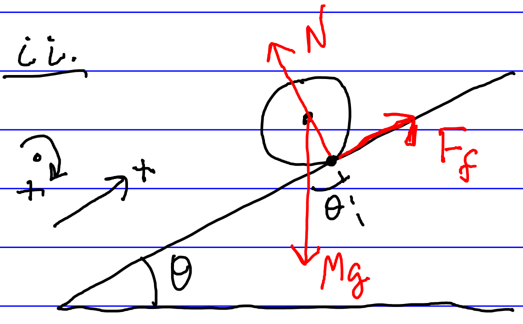
N2-rotasjon: $\tau = I\alpha = I \cdot 0 = 0$

dvs. null ytre kraftmoment τ om rotasjonsaksen

Kun friksjonskrafta F_f kunne ha bidrege til τ $(|\tau| = |F_f| R)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{F_f = 0}}$

ii.



Sylinderen sin hastighet minkar $\Rightarrow$ $a < 0$, dvs. $\vec{a}$ har retning nedover langs skråplanet

$\alpha = a/R < 0$, dvs. vinkelhastigheten minkar, dvs. kraftmomentet må motverke rullebevegelsen $\Rightarrow$ $\vec{F}_f$ må peike oppover langs skråplanet

N2-trans: $\quad F_f - Mg\sin\theta = Ma$

N2-rot: $\quad -F_f R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$

$$\Rightarrow F_f = -\frac{1}{2}Ma$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}Ma - Mg\sin\theta = Ma$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{2}{3}g\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow F_f = -\frac{1}{2}M\cdot\left(-\frac{2}{3}g\sin\theta\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}Mg\sin\theta}}$$

(merk også at dersom vi set $\theta = 0$ gir dette $a = 0$ og $F_f = 0$, jf. b.i.)

(c) Konstant akselerasjon $\Rightarrow$ $v_L^2 - v_0^2 = 2aL$ der v_L er hastigheten på toppen av skråplanet. Dersom sylinderen så vidt når toppen er $v_L = 0$

$$\Rightarrow L = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{-v_0^2}{2(-\frac{2}{3}g\sin\theta)} = \boxed{\frac{3v_0^2}{4g\sin\theta}}$$

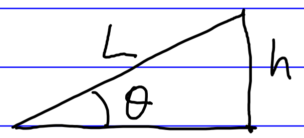
[Alternativ løysingsmetode: bruk bevaring av mekanisk energi $E_k + E_p$.

$$E_k = E_{k,trans} + E_{k,rot} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv^2$$

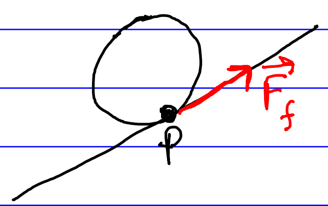
$$\Rightarrow \frac{3}{4}Mv_0^2 = Mgh = MgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{3v_0^2}{4g\sin\theta}}$$



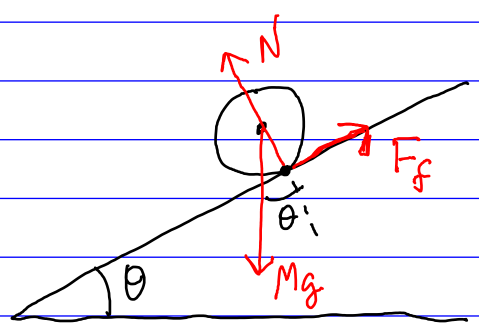
]

(d)



Ved rein rulling er $\vec{s}_P = 0$, dvs. kontaktpunktet P er i ro (null forflytning) $\Rightarrow$ $\vec{F}_f$ gjer ikkje noko arbeid $\Rightarrow$ mekanisk energi bevart

(e) Rein rulling $\Rightarrow$ inga skliing i kontaktpunktet
$\Rightarrow$ friksjonskrafta $\vec{F}_f$ er statisk, ikkje kinetisk
$\Rightarrow$ $F_f \leq F_{f,max} = \mu N$, der N er normalkrafta



N2-trans ⊥ skråplanet:

$$N - Mg\cos\theta = Ma_\perp = 0$$

$$\Rightarrow N = Mg\cos\theta$$

$$F_f = \frac{1}{3}Mg\sin\theta \leq \mu Mg\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mu \geq \frac{1}{3}\tan\theta}$ for å ha rein rulling