TFY4108 Fysikk, haust 2013: Løysing til ordinær eksamen 18. des.

Oppgåve 1

Den følgjande diskusjonen av denne oppgåva er ganske lang. Grunnen er at for fleire av deloppgåvene diskuterer eg alternative løysingsmetodar. Merk at det kan vere stor skilnad i arbeidsmengda involvert i dei forskjellige metodane; det lønnar seg å bruke dei som er mest effektive! Merk også korleis ortonormalitets-eigenskapen (likning (4) i oppgåveteksten) kan brukast til å evaluere mange integral på ein rask og enkel måte.

(a) Det finst fleire måtar å vise at $\Psi(x,t)$ er normert. Den enklaste er å vise at normeringskravet (formelliste)

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \tag{1}$$

er oppfylt. Då treng vi å vite koeffisientane c_n. Den enklaste måten å finne dei på er ved å skrive $\Psi(x,t)$ som

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t) = \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar} \tag{2}$$

og så samanlikne det siste uttrykket her med (formelliste) $\Psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$. Dermed kan ein simpelthen lese av koeffisientane c_n. Ein ser at

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{og} \quad c_n = 0 \text{ for } n \geq 3. \tag{3}$$

Dermed blir

$$\sum_n |c_n|^2 = \left|\sqrt{\frac{1}{3}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1. \tag{4}$$

Alternativt (men litt meir arbeidskrevjande) kan koeffisientane c_n finnast vha. formelen (formelliste) $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\Psi(x,0)$. Dette gir

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,0) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,0)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_1(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(x)\right] = \sqrt{\frac{1}{3}}\delta_{n,1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{n,2} \end{aligned} \tag{5}$$

(her brukte vi i siste overgang det oppgitte ortonormalitetsresultatet for funksjonane $\psi_n(x)$) som igjen gir (3). Alternativt (men endå litt meir arbeidskrevjande) kan $|c_n|^2$ finnast som (formelliste) $|\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Theta_\alpha^*(x)\Psi(x,t)|^2$ der $\Theta_\alpha(x)$ her må identifiserast som $\psi_n(x)$, eigenfunksjonane til energioperatoren (Hamiltonoperatoren), sidan $|c_n|^2$ er sannsynet for å måle eigenverdien E_n for denne operatoren. Ved bruk av $|e^{-iE_nt/\hbar}| = 1$ gir dette same resultat som over for $|c_n|^2$.

Alternativt, i staden for å vise (1) kan ein vise at det andre (ekvivalente) normeringskravet (formelliste)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = 1 \tag{6}$$

er oppfylt:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\Psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1^*(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2^*(x,t)\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t)\right) \\
= \;& \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\psi_1(x)}_{=1} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\psi_2(x)}_{=0} \\
+ \;& \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\psi_1(x)}_{=0} + \frac{2}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\psi_2(x)}_{=1} = \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{2}{3} = 1. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

(b) Sannsynet $P(E_n)$ for at ei måling av partikkelen sin energi skal gi verdien E_n er lik $|c_n|^2$. Dermed (sjå løysinga i (a) for identifikasjon av c_n, alternativt $|c_n|^2$):

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= |c_1|^2 = \frac{1}{3}, && (8) \\
P(E_2) &= |c_2|^2 = \frac{2}{3}, && (9) \\
P(E_n) &= |c_n|^2 = 0 \text{ for } n \geq 3. && (10)
\end{aligned}
$$

(Ein ser også frå dette at $\sum_n P(E_n) = 1$, slik det skal vere. Dette er ein nyttig sjekk å gjere på svaret.)

(c) Det er lettast å bruke at

$$
\langle E \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2. \qquad (11)
$$

(Dersom ein ikkje kan denne formelen "utenat", kan den utleiast frå (formelliste) $\langle g(F)\rangle = \sum_F g(F)P(F)$ med $g(F) = F$, $F = E$. Den diskrete versjonen av uttrykket for $\langle g(F)\rangle$ må veljast sidan kun dei diskrete verdiane E_n for energien er mogelege, med $P(E_n) = |c_n|^2$.) Med $E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/(2mL^2)$ får ein difor

$$
\langle E \rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\frac{1}{3}(1\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2) = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2}. \qquad (12)
$$

Alternativt (men *mykje* meir arbeidskrevjande her, og difor ikkje anbefalt!) kan ein bruke $\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\hat{H}\Psi(x,t)$, som ein også kan utleie frå (formelliste) $\langle g(F)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)g(\hat{F})\Psi(x,t)$, med $g(F) = F$ og $\hat{F} = \hat{H}$ (Hamilton-, altså energioperatoren). Dette gir

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle \;=\;& \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\hat{H}\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1^*(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2^*(x,t)\right)\hat{H}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t)\right) \\
=\;& \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\underbrace{\hat{H}\psi_1(x)}_{=E_1\psi_1(x)} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\underbrace{\hat{H}\psi_2(x)}_{=E_2\psi_2(x)} \\
+\;& \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\underbrace{\hat{H}\psi_1(x)}_{=E_1\psi_1(x)} + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\underbrace{\hat{H}\psi_2(x)}_{=E_2\psi_2(x)} \\
=\;& \frac{1}{3}E_1\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\psi_1(x)}_{=1} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}E_2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_1^*(x)\psi_2(x)}_{=0} \\
+\;& \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}E_1\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\psi_1(x)}_{=0} + \frac{2}{3}E_2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_2^*(x)\psi_2(x)}_{=1} = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

som sjølvsagt er same resultat som (12).

(d)

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\,x\,\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,x|\Psi(x,t)|^2 \tag{14}$$

der

$$\begin{aligned}|\Psi(x,t)|^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1^*(x,t)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2^*(x,t)\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t)\right)\\ &= \frac{1}{3}|\Psi_1(x,t)|^2+\frac{\sqrt{2}}{3}(\Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t)+\Psi_2^*(x,t)\Psi_1(x,t))+\frac{2}{3}|\Psi_2(x,t)|^2. \end{aligned}\tag{15}$$

Bidraget frå første og fjerde ledd her til (14) blir

$$\underbrace{\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x|\Psi_1(x,t)|^2}_{=L/2} + \underbrace{\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x|\Psi_2(x,t)|^2}_{=L/2} = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{L}{2} = \frac{L}{2}, \tag{16}$$

der vi brukte den oppgitte informasjonen om at forventningsverdien av x i ein stasjonær tilstand $\Psi_n(x,t)$ er lik $L/2$. Bidraget frå andre og tredje ledd i (15) til (14) blir, når vi set inn for $\Psi_n(x,t)$,

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{3}\underbrace{(e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}+e^{i(E_2-E_1)t/\hbar})}_{=2\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}}\frac{2}{L}\int_0^L dx\,x\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3L}\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\underbrace{\int_0^{\pi} dy\,y\,\sin y\sin 2y}_{=-8/9\ \text{(formelliste)}} = -\frac{32\sqrt{2}L}{27\pi^2}\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}.\end{aligned}\tag{17}$$

Dermed blir

$$\langle x\rangle = \frac{L}{2} - \frac{32\sqrt{2}L}{27\pi^2}\cos\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}. \tag{18}$$

Vi kan dermed lese av at

$$A = \frac{32\sqrt{2}L}{27\pi^2}\quad\left(\approx 0.34\,\frac{L}{2}\right)\quad \text{og}\quad \omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar}\quad\left(=\frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}\right). \tag{19}$$

(e) Sidan vi kjenner $\langle x\rangle$ som funksjon av t, finn ein $\langle p\rangle$ lettast frå Ehrenfests teorem (formelliste):

$$\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}-A\cos\omega t\right) = mA\omega\sin\omega t. \tag{20}$$

Alternativt (men *mykje* meir arbeidskrevjande her, og difor ikkje anbefalt!) kan ein bruke $\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)$ som følgjer frå (formelliste) $\langle g(F)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)g(\hat{F})\Psi(x,t)$ med $g(F) = F$ og $\hat{F} = \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Dette gir (eg gir ikkje detaljar ang. utrekninga av diverse integral)

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\\ &= \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1^*(x,t)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2^*(x,t)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_1(x,t)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2(x,t)\right)\\ &= \frac{\hbar}{i}\frac{2}{L}\int_0^L dx\left[\frac{1}{3}\sin\frac{\pi x}{L}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\sin\frac{\pi x}{L}\cdot\frac{2\pi}{L}\cos\frac{2\pi x}{L}\right.\\ &+ \left.\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\sin\frac{2\pi x}{L}\cdot\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi x}{L}\cdot\frac{2\pi}{L}\cos\frac{2\pi x}{L}\right] = \frac{\hbar}{i}\frac{2\pi}{L^2}\left[0+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(2\cdot\frac{-2L}{3\pi}e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\right.\right.\\ &+ \left.\left.1\cdot\frac{4\pi}{3L}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\right)+0\right] = \frac{\hbar}{i}\frac{2\pi}{L^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{4L}{3\pi}\cdot 2i\sin\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} = \frac{16\sqrt{2}}{9}\frac{\hbar}{L}\sin\omega t.\end{aligned}\tag{21}$$

Dette er det same resultatet som (20), noko ein kan verifisere ved å setje inn uttrykka (19) for A og ω i (20).

Oppgåve 2

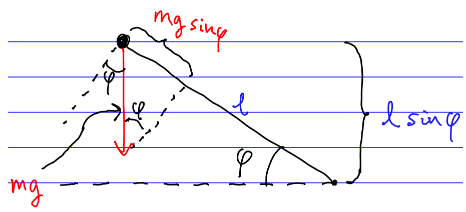
(a) Newtons 2. lov i radialretninga er

$$S + G_{\text{rad}} = ma_{\text{rad}} \tag{22}$$

der S er snorkrafta, G_{rad} er radialkomponenten av tyngdekrafta, og $a_{\text{rad}} = v^2/r$ er sentripetalakselerasjonen, med $r = \ell$ her. Med $S = 0$ og $G_{\text{rad}} = mg\sin\varphi$ får ein $mg\sin\varphi = mv^2/\ell$, som gir

$$v = \sqrt{g\ell\sin\varphi}. \tag{23}$$

(b) Sidan kun tyngdekrafta gjer arbeid (snorkrafta står alltid normalt på forflyttinga og gjer difor ikkje arbeid) kan ein bruke bevaring av mekanisk energi. Dersom ein tek nullpunktet for høgda ved botnen av bana, blir energibevaringa



$$K_0 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh, \tag{24}$$

der $h = \ell + \ell\sin\varphi$ er høgda ved vinkelen φ. Set ein også inn $v^2 = g\ell\sin\varphi$ frå (a) får ein

$$K_0 = \frac{1}{2}mg\ell\sin\varphi + mg\ell(1+\sin\varphi) = mg\ell\left(1 + \frac{3}{2}\sin\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{K_0}{mg\ell} - 1\right). \tag{25}$$

Dersom kula såvidt når toppen av sirkelbana betyr det at snorkrafta blir null der, altså for $\varphi \to 90°$ i uttrykket over. Dette gir

$$K_0 = mg\ell\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\sin 90°\right) = \frac{5}{2}mg\ell. \tag{26}$$

(c) Dersom den stive lekamen såvidt når sirkelbana sitt toppunkt, er farten til lekamen (og dermed den kinetiske energien) null der. Bevaring av mekanisk energi gir då $K_0 = mgh$, der h er høgdeskilnaden for massesenteret til lekamen mellom topp- og botnpunktet i bana. Sidan vi neglisjerer staven sin masse, ligg massesenteret til lekamen i kula, så $h = 2\ell$. Dermed blir

$$K_0 = 2mg\ell, \tag{27}$$

altså mindre enn den tilsvarande verdien (26) i (b). Grunnen til skilnaden er at i (c) har vi ein stiv lekam som difor ikkje har begrensingar på kor sakte den kan bevege seg i toppunktet, mens i (b) må snora vere stram gjennom bevegelsen, ellers vil kula falle ut av sirkelbana og dermed ikkje nå toppunktet i den. Dette medfører at i (b) må kula ha ein viss minimum kinetisk energi i toppunktet (gitt av $(1/2)m(\sqrt{g\ell\sin 90°})^2 = mg\ell/2$), så K_0 må vere stor nok til å supplere denne i tillegg til den potensielle energien som er den same i (b) og (c).

Oppgåve 3

(a) Spinnet til systemet (karusell + barn) om aksen er bevart fordi det ytre kraftmomentet om aksen er null. (Det vil generelt verke ei ytre kraft på karusellen under landinga (sjå (b)), men sidan denne verkar ved aksen har den null arm.) Vi kan difor bruke spinnbevaring om aksen til å finne ω. Spinnet om aksen før og etter landing blir

$$L_{\text{før}} = I_0\omega_0 + rmv, \tag{28}$$
$$L_{\text{etter}} = I\omega, \tag{29}$$

der I er tregleiksmomentet til karusell + barn etter landing, dvs. $I = I_0 + mr^2$. Spinnbevaring ($L_{\text{før}} = L_{\text{etter}}$) gir då

$$\omega = \frac{I_0\omega_0 + mrv}{I_0 + mr^2}. \tag{30}$$

(b) Den totale bevegelsesmengda til systemet (karusell + barn) er

$$\vec{p} = \vec{p}_{\text{karusell}} + \vec{p}_{\text{barn}}. \tag{31}$$

Sidan massesenteret til karusellen er på rotasjonsaksen, som er i ro, er $\vec{v}_{\text{cm,karusell}} = 0$. Dermed blir $\vec{p}_{\text{karusell}} = 0$ (sidan $\vec{p}_{\text{karusell}} = m_{\text{karusell}}\vec{v}_{\text{cm,karusell}}$), så kun barnet bidreg til systemet si bevegelsesmengd: $\vec{p} = \vec{p}_{\text{barn}}$. Både før og (like) etter landing har barnet si bevegelsesmengd retning oppover på figuren, med storleikar $p_{\text{barn,før}} = mv$ og $p_{\text{barn,etter}} = m(r\omega)$. Dermed blir

$$\Delta p = p_{\text{etter}} - p_{\text{før}} = m(r\omega - v) = \frac{m(r\omega_0 - v)}{1 + mr^2/I_0} \tag{32}$$

der ein får det siste uttrykket ved å setje inn (30) og forenkle. Retninga på $\Delta\vec{p}$ er difor oppover (nedover) på figuren dersom $r\omega_0$ er større (mindre) enn v. (Merk at $r\omega_0$ er farten før landing til punktet på karusellen der barnet landar.) Sidan den (midlere) ytre krafta $\vec{F}_{\text{ytre}}$ på systemet under landinga er gitt som $\vec{F}_{\text{ytre}} = \Delta\vec{p}/\Delta t$, der Δt er tida landinga varer, følgjer det at $\vec{F}_{\text{ytre}}$ peiker oppover (nedover) på figuren dersom $r\omega_0$ er større (mindre) enn v. (Denne krafta må verke ved rotasjonsaksen, sidan det er der karusellen er festa til omgjevnadene.)

Oppgåve 4

(a) Likevektsvilkåra er at både summen av ytre krefter og summen av ytre kraftmoment må vere 0:

$$\text{"N1-trans"}: \quad \sum \vec{F} = 0, \tag{33}$$

$$\text{"N1-rot"}: \quad \sum \vec{\tau} = 0 \quad \text{(for eitkvart referansepunkt)} \tag{34}$$

Vi vel positiv translasjonsretning oppover langs skråplanet og tilhøyrande positiv rotasjonsretning med klokka (den vegen jojoen roterer dersom den rullar oppover skråplanet). N1-trans langs skråplanet gir då

$$F_0 + f_0 - Mg\sin\theta = 0, \tag{35}$$

der vi har anteke at friksjonskrafta (som er statisk) peikar oppover skråplanet. Vel vi referansepunktet for kraftmoment på rotasjonsaksen gir verken normalkrafta frå underlaget eller tyngdekrafta bidrag til N1-rot langs (om) rotasjonsaksen, som dermed blir

$$F_0 r - f_0 R = 0. \tag{36}$$

Løysing av desse to likningane mhp. dei to ukjende F_0 og f_0 gir

$$F_0 = \frac{R}{R+r} Mg\sin\theta, \tag{37}$$

$$f_0 = \frac{r}{R+r} Mg\sin\theta. \tag{38}$$

Sidan f_0 kjem ut positiv betyr det at friksjonskrafta peikar oppover langs skråplanet slik vi antok. (For ordens skuld: Denne konklusjonen ang. den faktiske retninga til den statiske friksjonskrafta er sjølvsagt uavhengig av kva retning vi antek at krafta har når vi gjer utrekninga. Hadde vi anteke friksjonskraft nedover, ville forteikna framfor f_0 i (35) og (36) ha vorte motsett, slik at f_0 ville ha vorte negativ, dvs. friksjonskrafta peikar i motsett retning av det vi antok, dvs. den peikar oppover.)

(b) Likevekta forutset at jojoen ikkje sklir, så friksjonskrafta er statisk. Men storleiken på den statiske friksjonskrafta er begrensa:

$$|f_0| \le \mu_s N, \tag{39}$$

der N er normalkrafta frå underlaget. N1-trans normalt på skråplanet gir $N = Mg\cos\theta$. Ved å setje inn uttrykka vi har funne for f_0 og N gir (39) at

$$\mu_s \ge \frac{r}{R+r}\tan\theta \tag{40}$$

som altså er kravet til μ_s for at likevekta skal vere mogeleg.

(c) Vi bruker dei same konvensjonane og antakelsane ang. retningar som i (a). N2-trans langs skråplanet blir

$$F + f - Mg\sin\theta = Ma \tag{41}$$

og N2-rot om rotasjonsaksen blir

$$Fr - fR = I\alpha = \frac{1}{2}MRa \tag{42}$$

der vi i siste overgang brukte $I = \frac{1}{2}MR^2$ og $a = R\alpha$ (den siste relasjonen følgjer ved å tidsderivere betingelsen $v = R\omega$ for rein rulling på underlaget). Løysing av (41) og (42) mhp. dei to ukjende a og f gir

$$a = \frac{2}{3}\left[\frac{F}{M}\left(1+\frac{r}{R}\right) - g\sin\theta\right], \tag{43}$$

$$f = \frac{1}{3}\left[F\left(\frac{2r}{R}-1\right) + Mg\sin\theta\right]. \tag{44}$$

Vi ser at dersom $r/R < 1/2$ blir leddet proporsjonalt med F i (44) negativt. Dersom F er stor nok, kan dette leddet i absoluttverdi vere større enn Mg-leddet, slik at f er negativ, dvs. friksjonskrafta peikar nedover langs skråplanet. Retninga på friksjonskrafta kan altså endre seg med F dersom $r/R < 1/2$.

(d) Den totale kinetiske energien til jojoen er summen av den kinetiske translasjonsenergien $(1/2)Mv^2$ assosiert med bevegelsen til massesenteret og den kinetiske rotasjonsenergien $(1/2)I\omega^2$ assosiert med rotasjonen omkring aksen gjennom massesenteret:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv^2 \tag{45}$$

der vi brukte betingelsen $v = R\omega$ for rein rulling på underlaget. Sidan akselerasjonen a er konstant[1] og jojoen startar frå ro ved tida $t = 0$ blir farten v til massesenteret ved tida t lik $v = at$. Set ein dette og det oppgitte uttrykket for a inn i (45) får ein

$$K = \left(1+\frac{r}{R}\right)^2 \frac{F^2t^2}{3M}. \tag{46}$$

(e) Med konstant akselerasjon og start frå ro blir

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{F}{3M}\left(1+\frac{r}{R}\right)t^2, \tag{47}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{a}{R}t^2 = \frac{F}{3MR}\left(1+\frac{r}{R}\right)t^2 \tag{48}$$

(vi ser at $s = R\theta$, som også kan sjåast geometrisk). Vha. desse uttrykka får vi

$$\begin{aligned} Fs + rF\theta &= \frac{F^2}{3M}\left(1+\frac{r}{R}\right)t^2 + \frac{r}{R}\frac{F^2}{3M}\left(1+\frac{r}{R}\right)t^2 \\ &= \left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{F^2}{3M}\left(1+\frac{r}{R}\right)t^2 = \left(1+\frac{r}{R}\right)^2\frac{F^2t^2}{3M}, \end{aligned} \tag{49}$$

som er uttrykket for K i (46). Dermed har vi vist at

$$K = Fs + rF\theta. \tag{50}$$

Her er Fs arbeidet krafta F gjer når massesenteret til jojoen flytter seg ein avstand s langs underlaget, dvs. Fs er "translasjonsarbeidet" til F. Vidare ser ein (ved å skrive $rF\theta = \tau\theta$ der $\tau = rF$ er kraftmomentet til F om rotasjonsaksen) at $rF\theta$ er arbeidet krafta F gjer når jojoen roterer vinkelen θ omkring rotasjonsaksen, dvs. $rF\theta$ er "rotasjonsarbeidet" til F. (Jf. formlane $dW = \vec{F}\cdot\vec{ds}$ og $dW = \tau d\theta$ i formellista.)

[1] Det var ikkje sagt eksplisitt i oppgåva at F var konstant. Men dersom F ikkje hadde vore konstant ville det ha vore umogeleg å finne den kinetiske energien ved tida $t > 0$ utan informasjon om tidsavhengigheita til F.