

Oppgave 1.

a) Bruker sfæriske Gauss-flater og deler opp  $r$  i underområder.

i)  $r < R_1$ :

Siden kulen er ledende, vil det ikke befinne seg noen ladning innenfor  $r = R_1$ . Vi får:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0 \quad \text{for } r < R_1$$

ii)  $R_1 < r < R_2$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{-2Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{for } R_1 < r < R_2$$

): Feltet er rettet radielt inn mot symmetrisentrum.

iii)  $R_2 < r < R_3$ :

Også kuleskallet er i ledende materiale. Under elektrostatiske forhold må E-feltet være 0 inne i lederen, og for å få til dette må en ladningen  $+2Q$  fordele seg på indre flate av kuleskall for å "nøytralisere" ladningsbidraget fra kjernen. Dette er det doble av den tilførte ladningen  $+Q$ , så kuleskallet polariseres ved at ennå en ladning  $+Q$  fordeler seg på indre flate mens en ladning  $-Q$  fordeler seg på ytre flate. Nettoladning av kuleskallet er fortsatt  $+Q$  så vi har ladningsbevaring, og nå får vi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{-2Q + 2Q}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow E = 0 \quad \text{for } R_2 < r < R_3$$

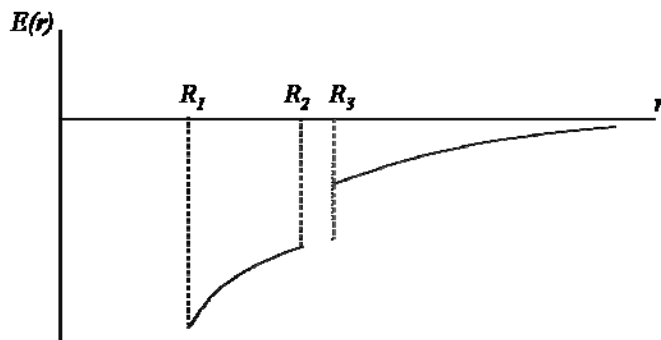
iv)  $r > R_3$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{-2Q + 2Q - Q}{\epsilon_0} = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{for } r > R_3$$

): E-feltet er rettet radielt inn mot symmetrisentrum.

Skisse av E-feltet:



b) Potensialet  $V(r)$ . Deler opp i underområder tilsvarende de i oppgave a), og starter utenfor kula.

i)  $r > R_3$ :

$$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ii)  $R_2 < r < R_3$ :

$$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_3}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_3} \frac{1}{r^2} \cdot dr - 0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

): Potensialet i ytre kuleskall er konstant.

iii)  $R_1 < r < R_2$ :

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_3}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_2}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_3} \frac{1}{r^2} \cdot dr - 0 + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{1}{r^2} \cdot dr \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

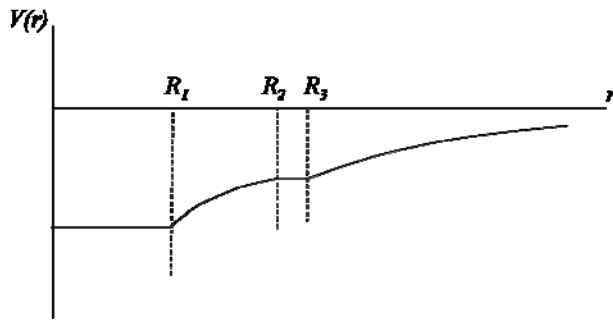
iv)  $r < R_1$ :

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_3}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_1}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_3} \frac{1}{r^2} \cdot dr - 0 + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r^2} \cdot dr - 0 \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

): Potensialet er konstant fra  $r=R_1$  til symmetrisentrum.

Potensialet er dessuten kontinuerlig.

Skisse av potensialet:



c) Endring i E(r):

Kuleskallet er så tynnt at det kan betraktes som en sfærisk flate. Vi setter  $R_3 \approx R_2$  og ser umiddelbart at området  $R_2 < r < R_3$  i skissene i a) og b) krymper inn til et punkt. Vi har dessuten fjernet  $-Q$  fra indre flate slik at vi har ladningsbalanse på kondensatoren. Konsekvensen for E-feltet blir nå:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

): Kun E-felt mellom kondensatorflatene

Endring i V(r):

Ingen E-felt utenfor kondensatoren gjør at V(r) blir som følger:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (R_1^{-1} - R_2^{-1}) & r < R_1 \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (r^{-1} - R_2^{-1}) & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Kapasitans

Vi finner dessuten ved innsetting at  $V(r=R_2) = 0$ , og har allerede fra svaret over at  $V(r=R_1) = -kQ(1/R_1 - 1/R_2)$ . Dermed finner vi

$$C = Q/V = Q / (V_{R_2} - V_{R_1}) = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

d) Innfører dielektrisk mellomlagsmateriale i området  $R_1 < r < R_2$ .

Endring i E(r):

Ingen geometriske endringer i forhold til i c), men vi endrer mellomlagsmediet fra vakuum ( $\epsilon_0$ ) til dielektrikum ( $\epsilon = K \epsilon_0$ ). Siden E-feltet i c) er 0 for alle andre områder i

r, kan vi simpelthen skrive

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0(r)}{K} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ -\frac{Q}{4\pi K \epsilon_0 r^2} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Hvor  $\vec{E}_0(r)$  er vakuump-feltet i oppgave c). Med  $K=10$ , blir altså E-feltet redusert med en faktor 1/10 (så lenge vi ikke utnytter den økte lagringskapasiteten ved å tilføre mer ladning til kondensatoren).

### Endring i V(r):

Endringen i V(r) gitt av endret E-felt i mellomområdet. Siden dette definerer potensialet i hele r (ingen andre feltbidrag), blir

$$V(r) = \frac{V_0(r)}{K} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi K \epsilon_0} (R_1^{-1} - R_2^{-1}) & r < R_1 \\ -\frac{Q}{4\pi K \epsilon_0} (r^{-1} - R_2^{-1}) & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Med  $V_0(r)$  som vakuumpotensialet i c).

### Kapasitans

Lar  $C_0$  være vakuump-kapasitansen. Vi får

$$C_K = Q/V = Q/(V_0/K) = KC_0 = 4\pi K \epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

): Kapasitansen (lagringskapasiteten) er økt med en faktor  $K=10$ .

e) Tilfellet kan betraktes som en seriekopling av to kondensatorer. Innerst får vi en kondensator med kapasitans

$$C_1 = 4\pi K \epsilon_0 \frac{\frac{1}{2} \frac{99}{100} R_2^2}{R_2 \left(\frac{99-50}{100}\right)} = 4\pi K \epsilon_0 \frac{99}{98} R_2$$

Utenfor denne ligger luftsjiktet med kapasitans

$$C_2 = 4\pi \epsilon_0 \frac{\frac{99}{100} R_2^2}{R_2 \left(1 - \frac{99}{100}\right)} = 4\pi \epsilon_0 99 R_2$$

Seriekopling gir resultantkapasitans

$$C_{res} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\left(\frac{99}{98} KR_2 \cdot 99R_2\right)}{\frac{99}{98} KR_2 + 99R_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{KR_2^2 \frac{99^2}{98}}{\frac{99R_2}{98} (K + 98)}$$

$$= 4\pi\epsilon_0 \frac{99KR_2}{(K + 98)}$$

Sammenlignet med vår opprinnelige kondensator blir forholdet:

$$\frac{C_{res}}{C_K} = \frac{4\pi\epsilon_0 \frac{99KR_2}{K + 98}}{4\pi\epsilon_0 KR_2} = \frac{99}{K + 98} = \frac{99}{108} \approx 0.92$$

): Vi taper omtrent 8% av tilsiktet lagringskapasitet.

## Oppgave 2

a) Krefte som virker på systemet:

Coulombkraft fra høyre og venstre punktladning, samt tyngdekraft.

Vi ser på kraftamplitudene for å vurdere om vi kan neglisjere gravitasjon:

$$F_g = m_e g$$

$$F_c = \frac{ke^2}{(-x_1 - x)^2} - \frac{ke^2}{(x_1 - x)^2} = ke^2 \frac{(x_1 - x)^2 - (x_1 + x)^2}{(x_1 - x)^2 (x_1 + x)^2} = ke^2 \frac{x_1^2 - 2xx_1 + x^2 - x_1^2 - 2xx_1 - x^2}{(x_1^2 - x^2)^2}$$

$$= -4ke^2 \frac{x_1 x}{x_1^4 \left(1 - \frac{x^2}{x_1^2}\right)^2} \approx -\frac{4ke^2}{x_1^3} x$$

I maksutslag/startposisjon blir forholdet mellom kraftamplitudene:

$$\frac{|F_c|}{|F_g|} = \frac{4ke^2 x_0}{x_1^3 m_e g} = \frac{e^2}{100\pi\epsilon_0 x_1^2 m_e g} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{100\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} (4 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} 9.81 \text{ m/s}^2} = 6.44 \cdot 10^{18}$$

Det virker rimelig å se bort fra tyngdekraften.

b)

Differensialligning/bevegelsesligning

Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F} = m_e a_x \hat{i} = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} = \frac{ke^2}{(-x_1 - x)^2} \hat{i} - \frac{ke^2}{(x_1 - x)^2} \hat{i} \approx -\frac{4ke^2}{x_1^3} x \hat{i}$$

hvor vi har brukt den tilnærmingen vi fant for total Coulombkraft i a). Alle komponenter er rettet parallelt med x-aksen, så vi kan sløyfe vektornotasjonen, samle alle termene på høyre side av ligningen, dividere med  $m_e$  og sette inn for  $k=1/(4\pi\epsilon_0)$  som gir:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m_e x_1^3} x = 0$$

c) Standard løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Uttrykk:

V.h.a. startbetingelser:

$$x(t=0) = x_0 = A \cos \delta \quad \vee \quad v_x(t=0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -A\omega_0 \sin \delta = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0 \quad \vee \quad A = x_0$$

Fra sammenligning med ligninga for en enkel harmonisk oscillator i formelvedlegget, ser vi at:

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m_e x_1^3} \Rightarrow \omega_0 = \frac{e}{x_1 \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e x_1}}$$

Tallverdi for egenfrekvensen  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{e}{2\pi x_1 \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e x_1}}$$

$$= \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2\pi \cdot 4.0 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 4.0 \cdot 10^{-10} \text{ m}}} = 6.32 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

d) Potensialet V(t):

Finner først  $E(x(t))$  fra den totale Coulombkrafta vi fant i oppgave b).

$$E(t) = E(x(t)) = \frac{F_c(x(t))}{-e} = \frac{4ke}{x_1^3} x(t) \quad \left( = \frac{4ke}{x_1^3} x_0 \cos(\omega_0 t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \right)$$

Potensialet V(t) er nå gitt ved:

$$V(x) - V(x_0) = V(t) - V_0 = - \int_{x_0}^x E(x) dx = - \frac{4ke}{x_1^3} \int_{x_0}^x x dx = - \frac{4ke}{2x_1^3} [x^2 - x_0^2]$$

Med  $V_0 = -\frac{2ke}{x_1^3} x_0^2$  får vi:

$$V(t) = \frac{V_0}{x_0^2} x^2(t) = \frac{V_0}{x_0^2} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = V_0 \cos^2(\omega_0 t)$$

e) Potensiell energi, kinetisk energi og total energi:

Her er det flere fremgangsmåter:

i. Via potensialet fra d).

$$U(t) = -eV(t) = -eV_0 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 x_1^3} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = U_{\max} \cos^2(\omega_0 t)$$

For en enkel harmonisk oscillator er totalenergien bevart, dvs.  $E_{\text{tot}} = \text{konst}$ . I maksutslag er oscillatorhastigheten 0 og dermed den kinetiske energien  $K=0$ . Dette samsvarer også med posisjoner der  $U(t) = U_{\max}$ . Dermed kan vi slutte at  $E_{\text{tot}} = U_{\max}$ . I enhver posisjon/tid har vi:

$$E_{\text{tot}} = U_{\max} = U(t) + K(t)$$

Dermed blir den kinetiske energien

$$K(t) = E_{\text{tot}} - U(t) = U_{\max} (1 - \cos^2(\omega_0 t)) = U_{\max} \sin^2(\omega_0 t)$$

ii. Kan også bruke sammenhengen  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  og finne  $k = \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 x_1^3}$  fra diffligninga i b) som en så bruker i ligninga for potensiell energi i fjær-og-masse oscillatoren som var  $U = 1/2 kx^2(t)$ .

Eller en kan bruke tilsvarende analogi for kinetisk energi ved:

$$K(t) = K(x(t)) = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{e^2 x_0^2}{2\pi \epsilon_0 x_1^3} \sin^2(\omega_0 t)$$

Deretter gjøres totalenergi-betraktninger og utdrag av det andre energiledet (K eller U) avhengig av hva man allerede har bestemt.

Tilslutt:

Effekttapet

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (U(t) + K(t)) = \frac{d}{dt} (U_{\max} (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))) = \frac{dU_{\max}}{dt} = 0$$

Dette er som ventet for en enkel harmonisk oscillator.

f) Bølgelengde:

Bølgefrekvensen er gitt ved oscillatorfrekvensen. Bruker dispersjonsrelasjonen  $c = \lambda f$ , og får:

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6.32 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4.74 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 474 \text{ nm}$$

Dette ligger i området for synlig lys, nærmere bestemt i området for blått lys.

g) Intensitetsbetraktninger:

Antall lysfotoner over pikselversnittet per tidsenhet,  $n$ , i avstand  $r = 1.0 \text{ cm}$  fra kilden er gitt ved:

$$n = \frac{I(r) \sigma_{pix}}{E_{foton}} = \frac{A_0 \sigma_{pix}}{4\pi r^2 E_{foton}} = \frac{2.27 \cdot 10^{-14} \text{ Js}^{-1} 2.34 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{4\pi (0.01 \text{ m})^2 4.2 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 100 \text{ fotoner/s}$$

h) Denne oppgaven krever litt ekstra. Forutsetningen for å finne en løsning er å innse at strålingen fra oscillatoren tilsvarer et effekttap. I kurset lærte vi at intensiteten er definert som tidsmidlet effekt/flate. For en hvilken som helst kuleflate i vakuum må altså

$$\langle P \rangle_t = \oint \langle \vec{S} \cdot d\vec{A} \rangle_t = \oint \langle \vec{S} \rangle_t \cdot d\vec{A} = \oint I_0 dA = 4\pi r^2 I_0 = A_0$$

Hvor  $\langle P \rangle_t$  er den gjennomsnittlige strålingseffekten som må svare til tapet for oscillatoren. Vi ser for øvrig fra oppgaveteksten at  $A_0$  er gitt i J/s, så det går an å bruke dimensjonsanalyse for å komme frem til at dette må være kildens strålingseffekt. Det instantane effekttapet for en dempet oscillator er:

$$\frac{dE}{dt} = -bv_x^2 = P$$

Dersom vi antar effekttapet som konstant, vil  $\langle P \rangle_t = P$  og vi får:

$$b = \frac{P}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{A_0}{\frac{1}{2} x_0^2 \omega_0^2} = \frac{2A_0}{x_0^2 \omega_0^2}$$

Med insatte tall får vi:

$$b = \frac{2 \cdot 2.27 \cdot 10^{-14} \text{ Js}^{-1}}{(4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot 2\pi \cdot 6.32 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1})^2} = 1.79 \cdot 10^{-22} \text{ kg/s}$$



Kriteriet for underdemping er at  $(b/m)^2 < 4\omega_0^2$ . Om vi sammenligner leddene, finner vi:

$$\frac{\left(\frac{b}{m}\right)^2}{4\omega_0^2} = \frac{b}{2\omega_0 m_e} = 2.48 \cdot 10^{-8}$$

): Systemet er underdempet og  $\omega \approx \omega_0$ .

Dempningen kan virke svak, men tiden det tar før oscillatoren er redusert til 1% av opprinnelig amplitude er:

$$t = -\frac{2m_e}{b} \ln(0.01) = 4.68 \cdot 10^{-8} \text{ s} \approx 47 \text{ ns}$$

Sett i forhold til svingeperioden, som er  $T=1/f_0=1.58 \cdot 10^{-15}$  s har likevel oscillatoren på dette tidspunktet svingt omlag  $3.0 \cdot 10^7$  sykler.

i) Intensitet i 0' te ordens maksima:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I_N(r)}{I(r)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2(N\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin(N\alpha) \cos(N\alpha) N}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{N \sin(2N\alpha)}{\sin(2\alpha)} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2N^2 \cos(2N\alpha)}{2 \cos(2\alpha)} = N^2 \end{aligned}$$

Antall kilder N:

Antall fotoner/tidsenhet i sentralpikselen for 0' te ordens maksima med N kilder er  $n_N = N^2 n_1$ , hvor  $n_1$  er fotonfluksen vi fant i samme piksel med en kilde i oppgave f).

For å løse oppgaven bør vi ta hensyn til kildens dempning, men om vi i første omgang neglisjerer dette, finnes N ved å kreve

$$n_N t_{0.01x_0} = N^2 n_1 t_{0.01x_0} \geq 100 \quad \Rightarrow \quad N \geq \sqrt{\frac{100}{n_1 t_{0.01x_0}}} = \sqrt{\frac{100}{100 \cdot 4.68 \cdot 10^{-8}}} = 4620 \text{ Kilder}$$

Tar vi hensyn til dempning, blir det litt mer krevende. Vi må først ta i bruk at lineariseringen av Coulombkraften gjør at strålens  $E(t)$  er proporsjonalt med  $x(t)$  (vi brukte dette i oppgave d).

$I(t) \propto E(t)^2$  slik at intensitetsdempningen blir kvadratet av felt/oscillatordempningen,

dvs.  $e^{-\gamma t} \cdot e^{-\gamma t} = e^{-2\gamma t}$ ,  $\gamma = \frac{b}{2m}$

Vi får:

$$I_N(t) = I_N(0) e^{-\frac{b}{m} t} \quad \Rightarrow \quad n_N(t) = N^2 n_1 e^{-\frac{b}{m} t}$$

Siden  $n_N$  nå varierer s.f.a. tiden må vi integrere over måletiden for å finne N. Dvs.:

$$\int_0^{t_{0.01x}} n_N(t) dt = \int_0^{t_{0.01x}} N^2 n_1 e^{-\frac{b}{m}t} dt = \frac{N^2 n_1 m}{b} [1 - e^{-\frac{b}{m}t_{0.01x}}] \geq 100$$

$$\Rightarrow N \geq \sqrt{\frac{100b}{n_1 m_e [1 - e^{-\frac{b}{m_e}t_{0.01x}}]}} = \sqrt{\frac{b}{m_e [1 - (0.01)^2]}} = \sqrt{\frac{1.79 \cdot 10^{-22}}{0.9999 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}} \approx 14000 \text{ kilder}$$

Oppgave 3:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	C	C	D	C	C	E	D	C