

Oppgave 1.

a) Erstatte parallelkoblingen $C_2 \parallel C_3$ med ekvivalenten $C_4 = C_2 + C_3 = 2C$. Denne er seriekoblet med C_1 .

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4} = \frac{2}{3} C$$

b)

i. Ved $t=0$: Ingen ladning på C_{eq} , og derfor heller ikke noe spenningsfall over kondensatoren. K2 gir:

$$\varepsilon = i(t=0)R \Rightarrow i(t=0) = \frac{\varepsilon}{R}$$

Ved $t=t_a$: Kondensatoren er fullt oppladet, dvs.

$$i(t=t_a) = \frac{dq}{dt} = 0$$

ii. Potensialfallet over ekvivalenten må være det samme som det totale potensialfallet over kondensatorkoblingen.

For seriekoblingen må ladningen på C_1 og C_4 være den samme (neg. plate på C_4 og pos. plate på C_1 er ikke sluttet til resten av kretsen,): de lades v. induksjon.)

$$V_{eq} = \frac{Q_0}{C_{eq}} = \frac{3Q_0}{2C} = V_1 + V_4 = Q_1 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C} \right) = Q_1 \frac{3}{2C}$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_4 = Q_0$$

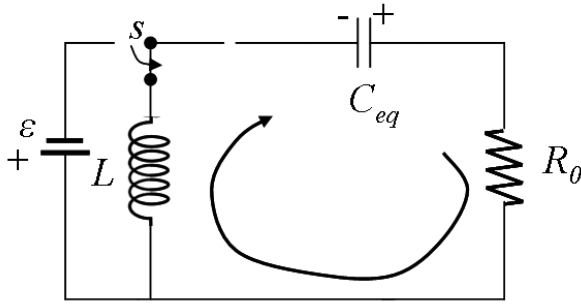
): ladningene på C_1 og C_4 er de samme som på C_{eq} .

Ladningen på C_4 fordeles på C_2 og C_3 . Disse er koblet i parallel, så potensialfallene må oppfylle $V_4 = V_2 = V_3$,

$$\frac{Q_0}{2C} = \frac{Q_2}{C} = \frac{Q_3}{C} \Rightarrow Q_2 = Q_3 = \frac{Q_0}{2}$$

): Kondensatorene i parallelkoblingen er ladet med halvparten hver av ladningen på ekvivalenten C_4 .

c) Bruker K2 og velger omløpsretning som vist i figuren:



$$\text{K2: i. } V_L + V_R + V_C = -L \frac{di}{dt} - R_0 i + \frac{q}{C_{eq}} = 0$$

Velger $i = -\frac{dq}{dt}$ og deriverer ligninga over med hensyn på tida:

$$\begin{aligned} -L \frac{d^2 i}{dt^2} - R_0 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_{eq}} \frac{dq}{dt} &= -L \frac{d^2 i}{dt^2} - R_0 \frac{di}{dt} - \frac{i}{C_{eq}} = 0 \\ \Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} + R_0 \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_{eq}} &= 0 \end{aligned}$$

Dette er difflikn. for et dempet svingsystem, og forutsetningen for at løsinga skal kunne foreligge på formen gitt i oppgaven, er at systemet er underdempet.

$$\text{Dvs.: } \frac{R_0^2}{4L^2} < \frac{1}{LC_{eq}} \quad (): R_0^2 < \frac{4L}{C_{eq}}$$

$$\text{ii. Har: } \gamma = \frac{R_0}{2L} \text{ og } \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC_{eq}} - \frac{R_0^2}{4L^2}}.$$

Fasen:

$$i(t_1 = 0) = I_0 \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

Og:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt_1} &= -\gamma i(t_1) - \omega' I_0 e^{-\gamma t_1} \sin(\omega' t_1 + \varphi) \\ \Rightarrow \left(\frac{di}{dt_1} \right)_{t_1=0} &= -\omega' I_0 e^{-\gamma t_1} \sin(\varphi) > 0 \text{ når } \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

M.a.o.: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, og løsinga av diff.likn kan skrives:

$$i(t_1) = I(t_1) \cos(\omega' t_1 - \frac{\pi}{2}) = I(t_1) \sin(\omega' t_1)$$

d)

$$I(t_1(R_0)) = I_0 e^{-\gamma t_1(R_0)} = 0.1 I_0$$

$$\Rightarrow t_1(R_0) = -\frac{\ln(0.1)}{\gamma} = -\frac{2L}{R_0} \ln(0.1)$$

e) $R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$ hvor $R_0 = 0.01 \Omega$ er motsanden ved temperatur $T_0 = 293 \text{ K}$, mens $\alpha = 0.005 \Omega/\text{K}$.

Har:

$$I(t_1(R(T))) = I_0 e^{-\gamma(T) t_1(R(T))} = 0.1 I_0$$

$$\Rightarrow t_1(R(T)) = -\frac{2L}{R(T)} \ln(0.1) = 0.8 t_1(R_0) = -\frac{1.6L}{R_0} \ln(0.1)$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \cdot \Delta T) = \frac{2}{1.6}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{0.25}{\alpha} = 50$$

$$): T = 343 \text{ K}$$

f)

Metode 1 – Damping: Her neglisjeres svingningene, og vi ser bare på dempeleddet

Feilforplantning (formelark):

$$\Delta t_1 = \frac{dt_1}{dT} \Delta T_{M1} = \frac{dt_1}{dR} \cdot \frac{dR}{dT} \Delta T_{M1} = \frac{2L}{R^2} \ln(f) \cdot R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T_{M1} = \frac{\gamma_0 \alpha}{\gamma^2} \ln(f) \cdot \Delta T_{M1}$$

Hvor vi antar måletid t_1 før vi har dempning med faktor $f = I(t_1)/I_0$.

Metode 2 – Antall perioder: Her neglisjeres dempeleddet, mens vi teller opp svingningene

Må først finne uttrykk for t_1 :

$$\sin \omega' t_1 = N \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow t_1 = \frac{\arcsin(N \cdot 2\pi \cdot f)}{\omega'}$$

Hvor N er vårt forhåndsbestemte antall av svingeperioder, mens f er en tallfaktor mellom 0 og 1, avhengig av fra hvor vi starter å måle innenfor en enkelt svingeperiode.

Får så:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{dt_1}{dT} \Delta T_{M2} = \frac{dt_1}{d\omega'} \cdot \frac{d\omega'}{dR} \cdot \frac{dR}{dT} \Delta T_{M2} = -\frac{\arcsin(N \cdot 2\pi \cdot f)}{(\omega')^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{2L}{\omega'} \cdot \frac{1}{2L} \cdot R_0 \alpha \cdot \Delta T_{M2} \\ &= -\frac{\gamma \cdot \gamma_0 \alpha}{(\omega')^3} \arcsin(N \cdot 2\pi \cdot f) \cdot \Delta T_{M2}\end{aligned}$$

Sammenlikner temperaturfølsomheten ved å se på forholdet mellom dt_1/dT for de to metodene:

M2/M1:

$$\frac{(dt_1/dT)_{M2}}{(dt_1/dT)_{M1}} = -\frac{\gamma^3}{(\omega')^3} \cdot \frac{\arcsin(N \cdot 2\pi \cdot f)}{\ln(f)}$$

Først sammenliknes arcsin mot ln. Førstnevnte vil variere mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$, mens $\ln \rightarrow -\infty$ når $f \rightarrow 0$. Uansett hvor ugunstig vi velger å starte klokka, vil forholdet mellom egenfunksjonene $< \pi/2$. For enhver praktisk måletid vil forholdet < 1 og gå mot 0 når måletiden øker.

Tallfaktoren foran egenfunksjonene blir:

$$\frac{\left(\frac{R(T)}{2L}\right)^3}{\left(\frac{1}{LC} - \left[\frac{R(T)}{2L}\right]^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{4L}{R^2(T)C} - 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{4L}{R_0^2 C (1 + \alpha \Delta T)^2} - 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{4 \cdot 10^5}{(1 + \alpha \Delta T)^2} - 1\right)^{3/2}}$$

): Så lenge ΔT ikke er altfor stor (når R blir så stor at vi nærmer oss kritisk eller overdempet system), vil denne prefaktoren $\ll 1$.

M.a.o. er metode 2 mest nøyaktig.

Her bør også kvalitative argumenter for at frekvensanalyse gir større nøyaktighet enn amplitudeanalyse gi positiv utelling.

Oppgave 2.

a) Velger sirkulære Ampere-sløyfer om sylindersentrum.

Retning:

H.h.r. gir B-felt om lederen i retning med klokka når strømmen går inn i papiplanet, og B-felt mot klokka om man velger strømretn. ut av papiplanet. Retningen blir den samme i alle områdene.

Magnetfeltstyrke:

i: $r < R_1$

Ingen strøm omsluttet innenfor dette området.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsluttet}} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

ii: $R_1 < r < R_2$:

Homogen strømtetthet i sylinderskallet og $R_2 = 2R_1$: $J = \frac{I_1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{I_1}{3\pi R_1^2}$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsluttet}} = \mu_0 \int_{R_1}^r J dA = \frac{2\mu_0 I_1}{3R_1^2} \int_{R_1}^r r dr = \mu_0 I_1 \frac{(r^2 - R_1^2)}{3R_1^2}$$

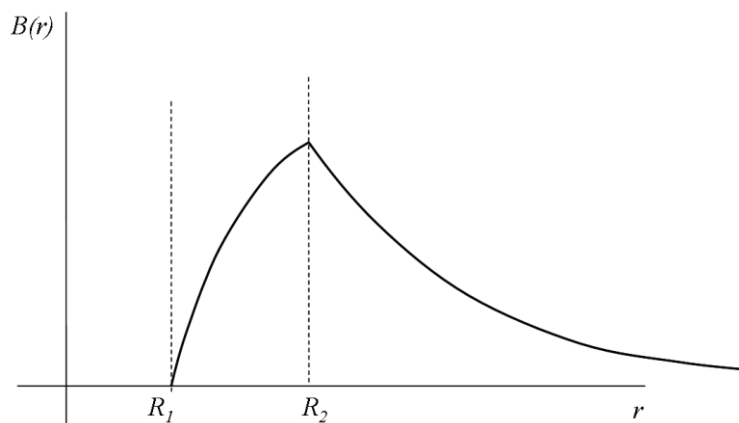
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{6\pi} \left(\frac{r}{R_1^2} - \frac{1}{r} \right)$$

iii: $r > R_2$:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsluttet}} = \mu_0 I_1$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Skisse av B-felt:



b)

B-feltet varierer kun s.f.a. y. Arealet av trekanten s.f.a. y er:

$$A = \frac{2x(y) \cdot y}{2} = x(y) \cdot y \Rightarrow dA = x(y) \cdot dy$$

Finner $x(y)$ fra trekantgeometrien: $\frac{x(y)}{y - y_1} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x(y) = \frac{1}{\sqrt{3}}(y - y_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{a}{2}$

B-feltet peker inn i sløyfeplanet. Velger tilsvarende retn. for $d\vec{A}$.

Integrasjonsveien fra spissen av trekanten til bunnlinja er $h = a \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Fluksen blir dermed:

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \cdot dA = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{a\sqrt{3}} B \left[\int_0^{x(y)} dx \right] dy = \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{a\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{y}\right) dy \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\pi} \cdot \left[y - \frac{\sqrt{3}}{2} a \ln y \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\sqrt{3}a} = \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi} \cdot [1 - \ln(2)] = 0.307 \frac{\mu_0 I_1 a}{4\pi}\end{aligned}$$

c) Indusert strøm.

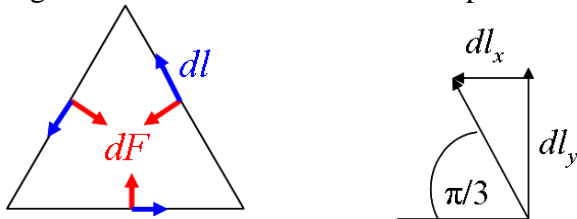
Retning: Magnetfeltet og magnetisk fluks øker s.f.a. tid. Med retning av I_1 som gitt i figuren, gir Lenz lov at den induserte strømmen vil gå i retning mot klokka.

Verdi:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_B}{dt} = -0.307 \frac{\mu_0 a}{4\pi R} \frac{dI_1}{dt} = -0.307 \frac{\mu_0 a}{4\pi R} (k_1 + 2k_2 \cdot t)$$

d) Magnetiske krefter på sløyfa

Langs hver av side vil dF stå normalt på sidekanten rettet innover i sløyfa (se fig venstre)



Bunnlinja gir et rent dF_y -bidrag vil netto kraft parallelt $-\hat{j}$. dF_y er dessuten konstant langs hele linja siden B-feltet er konstant.

$$\begin{aligned}d\vec{F}_y &= -i_{ind} \cdot dl \cdot B(y = \sqrt{3}a) \cdot \hat{j} \\ \Rightarrow F_y &= -i_{ind} \cdot a \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{3}a} = -\frac{\mu_0 i_{ind} I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

De to andre sidekantene vil ha bidrag både langs x- og y til dl :

$$d\vec{F} = i_{ind} d\vec{l} \times \vec{B} = i_{ind} (dl_x B(-\hat{i} \times \hat{k}) \pm dl_y B(\hat{j} \times \hat{k})) = i_{ind} (dl_x B \cdot \hat{j} \pm dl_y B \cdot \hat{i})$$

Hvor \pm viser til h.h.v venstre og høyre sidekant. Vi ser at kraftbidragene rettet langs x,

$d\vec{F}_x = \pm i_{ind} dl_y B \cdot \hat{i}$, kansellerer (symmetri), mens kraftbidragene rettet langs y,

$d\vec{F}_y = i_{ind} dl_x B \cdot \hat{j}$, adderer. Vi kan dermed sløyfe x-bidrag og regne ut y-bidrag fra en av kantene og multiplisere svaret med 2.

$dl_x = dl \sin(\pi/6) = dl/2$ finnes fra geometriske betraktninger (se fig. høyre over).

$$\Rightarrow d\vec{F}_y = 2 \cdot i_{ind} \cdot B(y) \cdot \frac{dl}{2} \cdot \hat{j} = i_{ind} \cdot B(y) \cdot dl \cdot \hat{j}$$

B-feltet varierer s.f.a. y og dermed også langs integrasjonsveien dl , så vi må uttrykke dl s.f.a. dy .

Fra trekantgeometrien får vi:

$$l = \frac{y}{\cos \frac{\pi}{6}} \Rightarrow dl = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot dy$$

Setter inn og integrerer:

$$F_y = \frac{2}{\sqrt{3}} i_{ind} \int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\sqrt{3}a} B(y) \cdot dy = \frac{2}{\sqrt{3}} i_{ind} \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln(2)$$

Legger sammen bidragene fra alle sidekantene og får:

$$F_y = \frac{\mu_0 i_{ind} I_1}{2\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \ln(2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{\mu_0 i_{ind} I_1}{2\pi} [0.961 - 0.693] = 0.268 \frac{\mu_0 i_{ind} I_1}{2\pi}$$

Retning: Nettokraften er frastøtende.

e) Amperes lov på generell form er gitt ved:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_d) = \mu_0 (i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt})$$

Hvor:

\vec{B} er magnetfeltet forårsaket av: 1) strømmen i lederen, 2) elektrisk fluksendring i kondensatoren.

$d\vec{l}$ er integrasjonsvektoren i sløyfeintegralet.

μ_0 er vakuumpermeabiliteten.

i_c er strømmen i lederen (conduction current)

i_d er en (tenkt) forskyvningstrøm i kondensatoren (displacement current).

ϵ_0 er vakuumperrmittiviteten.

$\frac{d\phi_E}{dt}$ er elektrisk fluksendring i kondensatoren.

Forskyvningstrømmen $i_d=i_c$ (ladningsbevarelse), men ”strømtettheten” i kondensatoren er forskjellig fra den i lederen. Homogen ladningsfordeling på kondensatoren til enhver tid gir homogen elektrisk fluks og dermed også homogen forskyvningstrømtetthet, men denne fordeler seg helt fra senterlinja til radius av platene R .

Dvs.

i) $r < R$: Homogen strømtetthet $J_D = I_1(t)/(\pi R^2)$.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{D,enc} = \mu_0 \int_0^r J_D 2\pi r dr = 2 \frac{\mu_0 I_1(t)}{R^2} \int_0^r r dr = \mu_0 I_1(t) \frac{r^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

ii) $r > R$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{D,enc} = \mu_0 I_1(t)$$

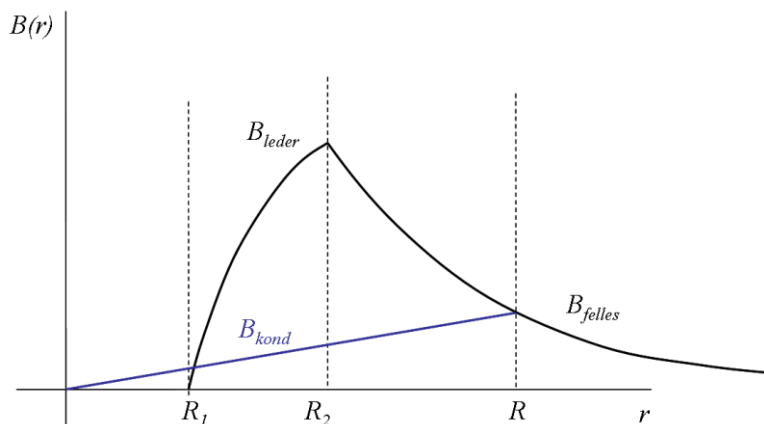
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi r}$$

Sammenligning:

For $r > R$ er felt rundt leder og fra kondensator like, men innenfor radius av kondensatorplatene er feltene forskjellige.

I kondensatoren har vi felt i hele området med unntak av symm. sentrum, og dette vokser lineært med r .

Lederen har samme felt som i ii) ovenfor helt inn til $r < R_2$, hvor feltet avtar i styrke proporsjonalt med $r/\text{konst} - 1/r$ inn til R_1 . Innenfor R_1 er feltet i lederen 0.



Oppgave 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	C	E	B	D	E	E	A	D