Eksamen i Fysikk, fag TFY 4135
Tirsdag 30. mai 2006
Løsninger

1) Oppgitt formel for Doppler-effekten for lyd:

$$f_m = \frac{v + v_m}{v + v_s}\, f_s \; .$$

I oppgaven antas det at mottageren (lytteren) står stille, altså at $v_m = 0$. Brannbilen beveger seg med en konstant hastighet v_b, som vi regner som positiv, og sirenen sender lyd med en frekvens f_s. Først kommer bilen mot oss, da regner vi v_s som negativ, altså $v_s = -v_b$, slik at $f_m > f_s$:

$$f_m = f_1 = \frac{v}{v - v_b}\, f_s \; .$$

Etterpå kjører bilen bort fra oss, da regner vi v_s som positiv, altså $v_s = +v_b$, slik at $f_m < f_s$:

$$f_m = f_2 = \frac{v}{v + v_b}\, f_s \; .$$

Forholdet mellom de to frekvensene vi hører, er et heltonetrinn, h^2,

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v + v_b}{v - v_b} = h^2 = \sqrt[6]{2} = 1{,}122462 \; .$$

Ligningen

$$v + v_b = h^2(v - v_b)$$

har løsningen

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1}\, v = \frac{0{,}122462}{2{,}122462}\, v = 0{,}05770 \cdot 340 \text{ m/s} = 19{,}6 \text{ m/s} \\ &= 19{,}6 \text{ m/s}\, \frac{\text{km}}{1000 \text{ m}}\, \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = 70{,}6 \text{ km/h} \; . \end{aligned}$$

Et omtrentlig svar kunne vi finne ved hoderegning, som følger. Halvtoneintervallet h er nesten lik 1, vi har at $h = 1 + x$ der x er et tall mye mindre enn 1. Da er

$$h = 1 + x \approx \mathrm{e}^x \; ,$$

og

$$2 = h^{12} \approx \mathrm{e}^{12x} \; ,$$

med løsningen

$$x \approx \frac{\ln 2}{12} \approx \frac{0{,}69}{12} = 0{,}0575 \; .$$

Videre er hastigheten v_b til brannbilen mye mindre enn lydhastigheten v, forholdet $y = v_b/v$ er et lite tall, slik at

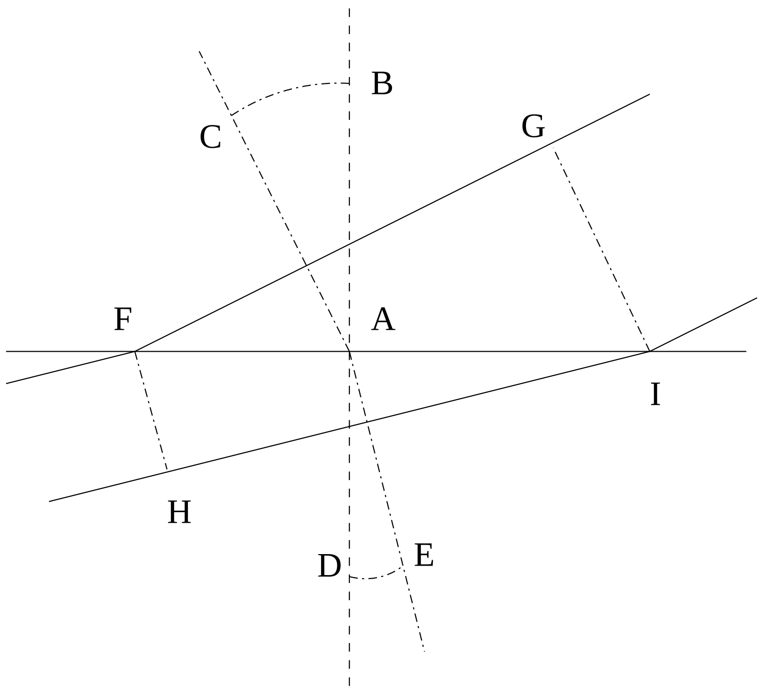
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v + v_b}{v - v_b} = \frac{1 + y}{1 - y} \approx (1 + y)^2 = h^2 = (1 + x)^2 \; ,$$

altså

$$y \approx x \approx 0{,}0575 \ .$$

Som er svært nær det mer nøyaktige svaret $y = 0{,}05770$. Den naturlige logaritmen av 2 er et nyttig tall å huske: $\ln 2 \approx 0{,}69$ (mer nøyaktig $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$).

2a) Huygens's prinsipp sier at vi kan se på hvert punkt på en bølgefront som en punktkilde for en ny bølge som brer seg ut i alle retninger. Ved et litt senere tidspunkt har alle bølgene fra alle punktene på bølgefronten tilsammen en omhyllingskurve som er den nye bølgefronten.



Figur 1: Lysbrytning i grenseflaten mellom medium 1 (øverst) og medium 2 (nederst).

Figuren illustrerer hvordan Huygens's prinsipp kan forklare lysbrytning i grenseflaten mellom to medier. Linjen BD er innfallsloddet, vinkelrett på grenseflaten. En bølgefront er tegnet ved to tidspunkt med en tid t imellom.

Figuren gjelder like godt enten lyset kommer nedenfra eller ovenfra. Hvis lyset kommer ovenfra, kaller vi vinkelen $\theta_1 = \angle BAC = \angle IFG$ for innfallsvinkelen, og vinkelen $\theta_2 = \angle DAE = \angle FIH$ for utfallsvinkelen. I følge Huygens's prinsipp er lengden av linjestykket GI lik $c_1 t$, og lengden av linjestykket FH er $c_2 t$, når c_1 og c_2 er lyshastigheten i henholdsvis medium 1 og medium 2. Vi har at

$$\sin\theta_1 = \frac{GI}{FI} = \frac{c_1 t}{FI} \ , \qquad \sin\theta_2 = \frac{FH}{FI} = \frac{c_2 t}{FI} \ ,$$

og det gir Snells lov på formen

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \left(= \frac{t}{FI} \right) \ .$$

Multiplikasjon av ligningen med lyshastigheten i vakuum, c, gir at

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \ .$$

2b) I figuren ovenfor er $c_2 < c_1$, slik at $n_2 > n_1$. Siden

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1$$

og $\sin\theta_1 \leq 1$, må altså

$$\sin\theta_2 \leq \frac{n_1}{n_2} \ .$$

Hvis lyset kommer nedenfra, altså i det mediet som har minst lyshastighet, dvs. størst brytningsindeks, med en innfallsvinkel θ_2 slik at

$$\sin\theta_2 > \frac{n_1}{n_2} \ ,$$

så kan ikke noe lys gå gjennom grenseflaten, og lyset blir totalreflektert.

Den kritiske innfallsvinkelen for lys i glass mot en grenseflate mot luft, er gitt av ligningen

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_\ell}{n_g} = \frac{1{,}0003}{1{,}52} = 0{,}658 \ ,$$

altså

$$\theta_2 = \arcsin 0{,}658 = 0{,}718 = 0{,}718 \, \frac{180^\circ}{\pi} = 41{,}2^\circ \ .$$

Hvis innfallsvinkelen er 45°, slik som inne i de to prismene i periskopet, så blir lyset totalreflektert, og derfor virker periskopet når det er fylt av luft.

Hvis periskopet derimot er fylt av vann, får vi en grenseflate av glass mot vann, og den kritiske innfallsvinkelen er gitt av ligningen

$$\sin\theta_2 = \frac{n_v}{n_g} = \frac{1{,}33}{1{,}52} = 0{,}875 \ ,$$

altså

$$\theta_2 = \arcsin 0{,}875 = 1{,}065 = 1{,}065 \, \frac{180^\circ}{\pi} = 61{,}0^\circ \ .$$

En innfallsvinkel på 45° er mye mindre enn 61°, så lyset blir ikke totalreflektert, tvert imot blir ganske lite lys reflektert, slik at periskopet ikke virker når det er fylt av vann.

2c) Snells brytningslov på formen

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

gjelder for lydbølger like mye som for lysbølger, bare med den forskjellen at c_1 og c_2 er lydhastigheter i de to mediene. Loven kan nemlig utledes fra Huygens's prinsipp på nøyaktig samme måte i begge tilfeller.

La medium 1 være luft og medium 2 være vann, og la $c_1 = 340$ m/s og $c_2 = 1480$ m/s være lydhastighetene. Den kritiske innfallsvinkelen for totalrefleksjon av lydbølger fra luft mot vann er gitt av ligningen

$$\sin\theta_1 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{340}{1480} = 0{,}2297 \ ,$$

altså

$$\theta_1 = \arcsin 0{,}2297 = 0{,}2318 = 0{,}2318\,\frac{180^\circ}{\pi} = 13{,}28^\circ \ .$$

Hvis innfallsvinkelen er større enn ca. 13°, så blir lyden totalreflektert! Det betyr at lyden fra en hund inne på land blir totalreflektert og ikke kan høres under vann, hvis ikke hunden står på et stupebrett rett over dykkeren som er under vann.

3a) Vi kan bruke Gauss's lov,

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}\ ,$$

til å beregne ladningen på overflaten innenfor et (horisontalt) areal A. Da velger vi en Gauss-flate som har vertikale sidevegger og to horisontale endeflater med areal A, en like over og en like under bakkenivået. Den totale elektriske fluksen ut gjennom Gauss-flaten, altså overflateintegralet på venstre side i ligningen, får bidrag bare fra den øvre endeflaten. Sideveggene gir null bidrag, både fordi de har lite areal (vi kan gjøre høyden så liten vi vil) og fordi det elektriske feltet er vertikalt. Endeflaten under bakkenivå gir også null bidrag, fordi jord er en elektrisk leder, og derfor er det elektriske feltet null nede i jorda. Vi får altså at

$$Q = \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\epsilon_0 E_0 A\ .$$

Overflatetettheten av ladning er

$$\sigma = \frac{Q}{A} = -\epsilon_0 E_0 = -8{,}854\times 10^{-12}\ \text{(F/m)}\ 180\ \text{(V/m)} = -1{,}594\times 10^{-9}\ \text{C/m}^2\ .$$

At den er negativ, kunne vi ha sagt uten utregning: det elektriske feltet over bakken peker nemlig nedover.

Siden elementærladningen er $1{,}6\times 10^{-19}$ C, er det altså 10^{10} overskuddselektroner pr. m^2, eller en million elektroner pr. cm^2 (men det ble det ikke spurt om).

3b) Komponentene av det elektriske feltet:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3Az}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{3Az}{r^4}\,\frac{x}{r} = \frac{3Axz}{r^5}\ ,$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3Az}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{3Az}{r^4}\,\frac{y}{r} = \frac{3Ayz}{r^5}\ ,$$

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -E_0 - \frac{A}{r^3} + \frac{3Az}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial z} = -E_0 - \frac{A}{r^3} + \frac{3Az}{r^4}\,\frac{z}{r} \\ &= -E_0 + \frac{A(3z^2 - r^2)}{r^5} = -E_0 + \frac{A(2z^2 - x^2 - y^2)}{r^5}\ . \end{aligned}$$

Hvis kulen er av massivt metall, er det elektriske feltet null inne i den. Hvis det elektriske feltet ikke er null inne i metall, vil det gå elektrisk strøm gjennom metallet, som vil få ladningene i metallkulen til å hope seg opp på den ene siden, inntil det elektriske feltet fra denne overskuddsladningen "nuller ut" det elektriske feltet som setter opp strømmen.

Hvis kulen ikke er av massivt metall, men er hul innvendig og fylt av luft, så er det elektriske feltet likevel null inne i hulrommet. En lukket metallbeholder er et *Faraday-bur* som skjermer perfekt for et utvendig elektrisk felt.

3c) En metalloverflate er alltid en ekvipotensialflate, igjen med unntak av den situasjonen at det går strøm i metallet. En strøm i metallkulen vil som sagt dø ut med tiden. For at det ikke skal gå strøm på overflaten, må det elektriske feltet $\vec{E} = -\nabla V$ ikke ha noen komponent parallelt med overflaten, og det er det samme som at potensialet er konstant på hele overflaten.

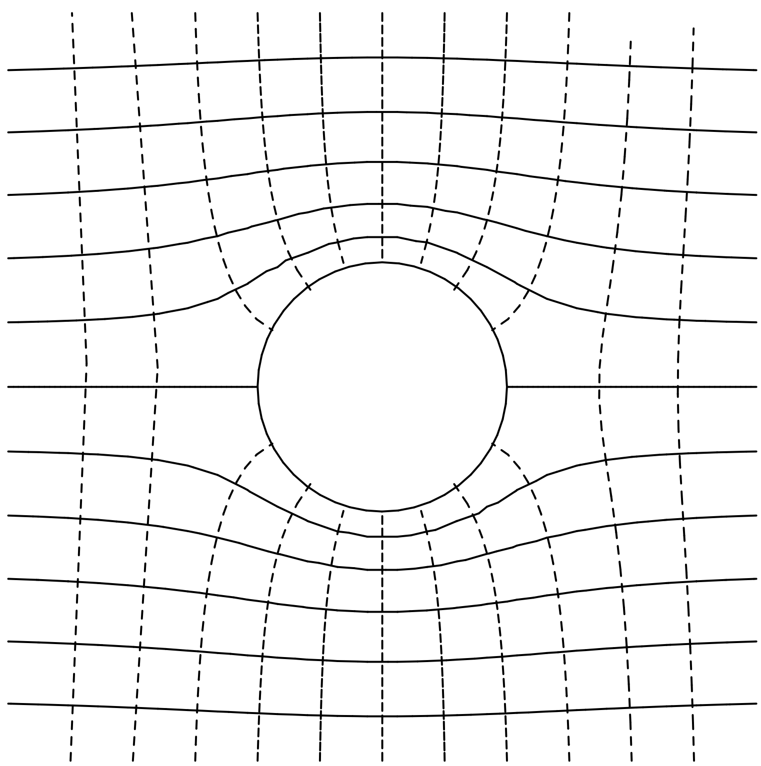
3d) Vi ser at for $z = 0$ er $V = 0$. Når kuleoverflaten er en ekvipotensialflate, så må $V = 0$ på hele overflaten, dvs. i alle punkter der $r = R$. Det gir ligningen

$$V(r = R) = E_0 z + \frac{Az}{R^3} = 0 \ ,$$

med løsningen

$$A = -R^3 E_0 \ .$$

Vi kan verifisere at det gir et elektrisk felt vinkelrett på kuleoverflaten: det gir nemlig for $r = R$ at $E_x = Cx$, $E_y = Cy$, $E_z = Cz$, med $C = 3Az/R^5 = -3E_0 z/R^2$.



Figur 2: Ekvipotensiallinjer (heltrukne, mer eller mindre horisontale) og feltlinjer (stiplede, mer eller mindre vertikale) i vertikalplanet gjennom sentrum av kulen.

4a) For å utlede de to ligningene kan vi bruke Kirchhoffs regel om at summen av alle spenningsfall rundt en lukket krets er lik null.
Først går vi følgende runde mot klokken:
Spenningsfallet over spolen med induktans L er $L\,\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$, spenningsfallet over motstanden med resistans R_2 er $R_2 i_2$, og spenningsfallet over spenningskilden er $-v$ (vi velger fortegn slik at spenningen stiger med v, altså faller med $-v$, når vi går gjennom spenningskilden i retning mot klokken). I følge Kirchhoff er

$$L\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 - v = 0\ ,$$

og dette er den første ligningen.
Deretter går vi følgende runde mot klokken:
Spenningsfallet over kondensatoren med kapasitans C er q_1/C, der q_1 og $-q_1$ er ladningene på de to kondensatorplatene, spenningsfallet over motstanden med resistans R_1 er $R_1 i_1$, og spenningsfallet over spenningskilden er $-v$. I følge Kirchhoff er

$$\frac{q_1}{C} + R_1 i_1 - v = 0\ .$$

Vi tidsderiverer denne ligningen, og bruker at $\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t = i_1$, det gir den andre ligningen som skulle utledes.

4b) Vi bruker ligningene for i_1 og i_2, for det tilfellet at $v = 0$. Hvis vi antar at $i_1 = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_1}}$ og $i_2 = B\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_2}}$, så er

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{i_1}{t_1}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{i_2}{t_2}\ .$$

Innsatt i de to ligningene gir det at

$$\begin{aligned} 0 &= R_2 i_2 - L\,\frac{i_2}{t_2}\ , \\ 0 &= -R_1\,\frac{i_1}{t_1} + \frac{i_1}{C}\ . \end{aligned}$$

Som er oppfylt (med $i_1 \neq 0$ og $i_2 \neq 0$) hvis og bare hvis

$$t_2 = \frac{L}{R_2} = \frac{0{,}1\ \mathrm{H}}{1000\ \Omega} = 1{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}\ ,$$

og

$$t_1 = R_1 C = 100\ \Omega\ 10\ \mathrm{pF} = 1{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}\ .$$

Begge tidskonstantene t_1 og t_2 er ganske små, og t_1 er ganske mye mindre enn t_2.

4c) Når vi setter inn i ligningene de komplekse eksponensialfunksjonene

$$v = v_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}\ , \qquad i_1 = A\,\mathrm{e}^{j\omega t}\ , \qquad i_2 = B\,\mathrm{e}^{j\omega t}\ ,$$

har vi at

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = j\omega v\ , \qquad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = j\omega i_1\ , \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = j\omega i_2\ ,$$

og det gir følgende ligninger:

$$
\begin{aligned}
v &= R_2 i_2 + Lj\omega i_2 \ , \\
j\omega v &= R_1 j\omega i_1 + \frac{i_1}{C} \ .
\end{aligned}
$$

Som kan omformes slik:

$$
\begin{aligned}
v &= (R_2 + jL\omega) i_2 \ , \\
v &= R_1 i_1 + \frac{i_1}{j\omega C} = \left(R_1 - \frac{j}{\omega C}\right) i_1 \ .
\end{aligned}
$$

Den totale strømmen fra spenningskilden er da

$$
i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{v}{R_2 + jL\omega} = \frac{v}{Z} \ ,
$$

der

$$
\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{R_2 + jL\omega} = \frac{\omega C}{R_1 \omega C - j} + \frac{1}{R_2 + jL\omega} \ .
$$

4d) Setter vi $\omega = 0$, har vi at

$$
\frac{1}{Z} = 0 + \frac{1}{R_2} \ ,
$$

altså $Z = R_2 = 1000\ \Omega$. Det kunne vi ha sagt uten videre, for i dette tilfellet går all strømmen gjennom spolen og motstanden R_2, og siden det er likestrøm, er spenningsfallet null over spolen.

Ved svært høy frekvens, $\omega \to \infty$, får vi at

$$
\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1} + 0 \ ,
$$

altså $Z = R_1 = 100\ \Omega$. Det kunne vi også ha sagt uten videre, for i dette tilfellet går all strømmen gjennom kondensatoren og motstanden R_1, og spenningsfallet er null over kondensatoren.

Med

$$
\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1\ \text{H}\ 10\ \text{pF}}} = 1{,}0 \times 10^6\ \text{Hz}
$$

har vi at

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{100\ \Omega - \frac{j}{1{,}0 \times 10^6\ \text{Hz}\ 10\ \text{pF}}} + \frac{1}{1000\ \Omega + j \times 0{,}1\ \text{H}\ 1{,}0 \times 10^6\ \text{Hz}} \\
&= \frac{1}{100\ \Omega - j \times 1{,}0 \times 10^5\ \Omega} + \frac{1}{1000\ \Omega + j \times 1{,}0 \times 10^5\ \Omega} \ .
\end{aligned}
$$

Her kan vi bruke at

$$
\frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 - (jb)^2} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} \ .
$$

Vi får at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{100 + j \times 1{,}0 \times 10^5}{1{,}0 \times (10^4 + 10^{10})\ \Omega} + \frac{1000 - j \times 1{,}0 \times 10^5}{1{,}0 \times (10^6 + 10^{10})\ \Omega} \\
&\approx \frac{100 + j \times 1{,}0 \times 10^5}{1{,}0 \times 10^{10}\ \Omega} + \frac{1000 - j \times 1{,}0 \times 10^5}{1{,}0 \times 10^{10}\ \Omega} \\
&= (1,0 \times 10^{-8} + j \times 1{,}0 \times 10^{-5} + 1{,}0 \times 10^{-7} - j \times 1{,}0 \times 10^{-5})\ \Omega^{-1} \\
&= 1,1 \times 10^{-7}\ \Omega^{-1}\ .
\end{aligned}$$

Altså $Z \approx 0{,}9 \times 10^7\ \Omega$ med en ganske liten imaginærdel (imaginærdelen av Z blir ikke eksakt null, vi har ikke regnet nøyaktig nok her til å finne ut hvor stor eller liten den blir).
Den spesielle vinkelfrekvensen $\omega = 1/\sqrt{LC}$ er *resonansfrekvensen* til kretsen. Ved denne frekvensen er impedansen svært stor, slik at strømmen i blir nesten null selv om $v \neq 0$. Hvis vi setter $\omega = 1/\sqrt{LC}$ og $R_1 = R_2 = 0$, får vi faktisk at $1/Z = 0$, altså at impedansen Z blir uendelig, og dermed $i = 0$.

4e) Tilfellet $v = 0$, $i \neq 0$, altså $Z = 0$, er det samme som vi tok for oss under punkt 4b). Siden

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} + \frac{1}{R_2 + jL\omega} = \frac{R_1 + R_2 + j\left(L\omega - \frac{j}{\omega C}\right)}{\left(R_1 - \frac{j}{\omega C}\right)(R_2 + jL\omega)}\ ,$$

så er

$$Z = \frac{\left(R_1 - \frac{j}{\omega C}\right)(R_2 + jL\omega)}{R_1 + R_2 + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)}\ ,$$

og vi har at $Z = 0$ når enten

$$R_1 - \frac{j}{\omega C} = 0\ ,$$

som betyr at

$$\omega = \frac{j}{R_1 C} = \frac{j}{t_1}\ ,$$

eller

$$R_2 + jL\omega = 0$$

som betyr at

$$\omega = -\frac{R_2}{jL} = \frac{jR_2}{L} = \frac{j}{t_2}\ .$$

Vi kjenner igjen tidskonstantene $t_1 = R_1 C$ og $t_2 = L/R_2$ fra punkt 4b). Disse to løsningene for ω gir (naturlig nok) de samme to eksponensialfunksjonene som vi fant under punkt 4b), nemlig

$$\mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{t_1}}\ ,$$

og

$$\mathrm{e}^{j\omega t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{t_2}}\ .$$