NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Prof. Morten Kildemo
Telefon: 73593211/93287744

TFY4160 og FY1002 Bølgefysikk

Eksamen, 3. desember, 2011, kl. 09.00 – 13.00

Hjelpemidler: C
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i samsvar med NTNUs regler. Trykte hjelpemidler: "Matematisk Formelsamling" (Rottmann), "Størrelser og Enheter i Fysikk og Teknikk," (O. Øgrim og B. E. Lian) eller "Fysiske Størrelser og Enheter," (C. Angell og B. E. Lian).

Evaluering/karaktersetting
Totalt antall poeng for skriftlig eksamen er 100. Disse vil være grunnlaget for evalueringen.

Oppgave 1 [20p] Svingninger og dispersive EM bølger.

a) [5p] Vi ser på et standard svingesystem, dvs. en masse festet i ei fjær som er festet til en vegg, med demping proporsjonal med massens hastighet. Vi neglisjerer her gravitasjonskrafta. Massen dras ut til en posisjon $x_0 > 0$ og slippes ved $t = 0$, med initiell hastighet $v_0 > 0$, se Figur 1.1(a). Skriv opp bevegelsesligningen for dette systemet. Anta et underdempet system og skisser utslaget $x(t)$ som funksjon av tid.

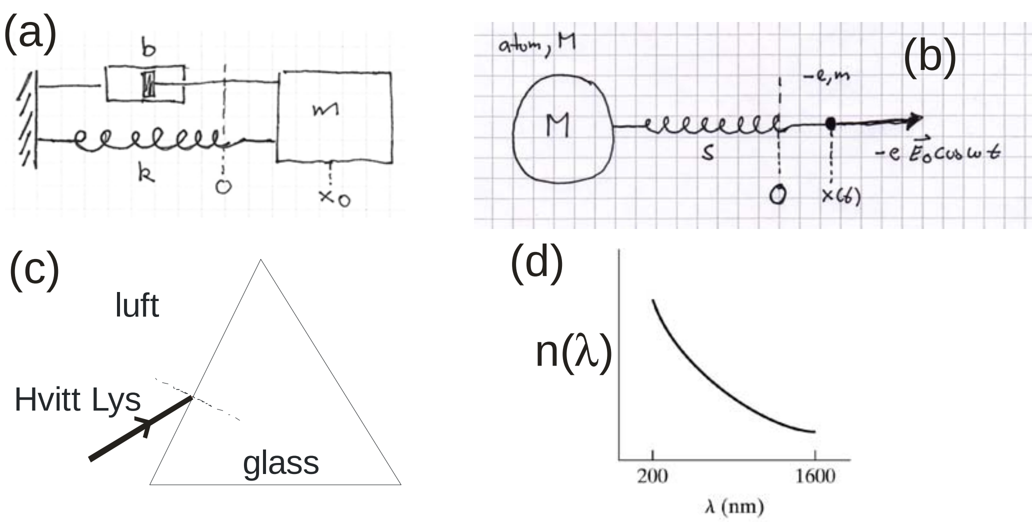
b) [10p] Vi ser nå på elektromagnetiske (EM) bølger i et dielektrikum, beskrevet av en modell hvor vi har N dipoler per volumenhet. Hver enkelt dipol oppstår ved at et elektron med masse m svinger omkring en likevektsposisjon $x = 0$. Elektronet er festet med ei fjær til et atom med masse $M >> m$, se Figur 1.1(b). Vi neglisjerer demping i denne modellen. Dette systemet drives med en oscillerende kraft[1] $\mathbf{F}(t) = -e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, se Figur 1.1(b).

- Finn først $x(t)$ for elektronets (massens) utslag fra likevekt. (Tips: Se bort fra den homogene delen av løsningen av bevegelsesligningen.)
- Finn videre dipolmomentet $\mathbf{p}(t)$, og finn et uttrykk for polariseringen $\mathbf{P}(\omega)$. (Tips: Anta at systemet har null dipolmoment i likevekt.)
- Anta videre[2] at $\mathbf{P}(\omega) \approx \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0$, og vis at man fra denne enkle modellen kan utlede følgende *dispersive* (frekvensavhengige) dielektrisitetskonstant (relative permittivitet) for mediet:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2/(m\varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

([1]Vi har her neglisjert posisjonsavhengigheten til EM bølgen.
[2]Denne antagelsen forenkler problemet betraktelig.)

c) [5p] Hvitt synlig lys sendes gjennom et glassprisme, se Figur 1.1(c), med brytningsindeks n(λ) som i Figur 1.1(d). Ved ***hjelp av å tegne stråler gjennom prismet, og ved å referere til brytningsloven,*** vis kvalitativt hvordan en lysstråle bestående av monokromatisk lys (lys med kun en bølgelengde/frekvens) kan oppnås ved hjelp av prismet.



Figur 1.1. (a) Massen dras ut til $x_0 > 0$ fra likevektsposisjonen og slippes med en hastighet $v_0 > 0$. (b) Elektron-fjær-modell for å finne bølgehastighet for EM bølger i et dielektrikum. Fjærkonstanten er benevnt med s, og $M >> m$. Elektronet drives av en oscillerende ekstern kraft $\mathbf{F}(t) = -e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$. Systemet antas å ha null dipolmoment for massen (elektronet) i likevektsposisjon. (c) Hvitt lys sendes mot glassprisme. (d) Typisk brytningsindeks for glass.

Oppgave 2 [26p] Mekaniske bølger.

Transversale bølger på streng:
Vi skal nå studere stående transversale bølger på en uniform gitarstreng (el. liknende) festet i begge ender. Strengen har lengde L, total masse m og strekk-kraft S. Vi starter med å eksitere bølger på formen $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$.

a) [6p] Vis at for bestemte frekvenser vil superposisjon av to propagerende bølger resultere i stående bølger med bølgelengder $\lambda_n = 2L/n$, og gi et uttrykk for de korresponderende frekvensene f_n.

b) [5p] Ved å forsiktig kun ”eksitere” grunntonen i den stående bølgen, måler vi ved hjelp av et raskt kamera tiden mellom to maksimale amplituder til 5 ms (dvs: perioden). Videre måles strengens lengde til L = 1 m og strengens totale masse til m = 50 g. Hva er bølgehastigheten på strengen, og hva er strekk-krafta S i strengen?

Lydtrykkbølge og svevning:
c) [10p] Ved å slå på to nesten identiske strenger samtidig, som da vil svinge med nesten lik frekvens, så hører vi en superposisjon av to plane longitudinale lydtrykkbølger, $\Delta p(x,t)$, med opprinnelse fra to gitarstrenger med frekvenser f_1 og f_2, der $\Delta f = f_2 - f_1$ og $f_1 \approx f_2$. Du kan her trygt anta at de plane lydbølgene oppstår fra samme romlige posisjon og har samme amplitude. Finn et *nøyaktig* uttrykk for intensiteten som vi hører, og vis at svevning oppstår.

Oppgitt: Energi (tidsavhengig) i longitudinal lydbølge: $\varepsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \right)^2$.

Longitudinale lydbølger i rør:
d) [5p] Vi antar nå at vi genererer stående longitudinale lydtrykkbølger i et rør (luftsøyle), med to lukkede ender. Skisser profilen ($\Delta p(x)$) til den stående lydtrykkbølgen i røret, for grunntonen og 1. og 2. harmoniske (overtoner).

Noen vanlige nyttige trigonometriske relasjoner:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\sin a + \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\sin a - \sin b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a + \cos b = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a - \cos b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(b-a)$$

Oppgave 3 [20p] EM bølger, Maxwells ligninger og polarisasjon.

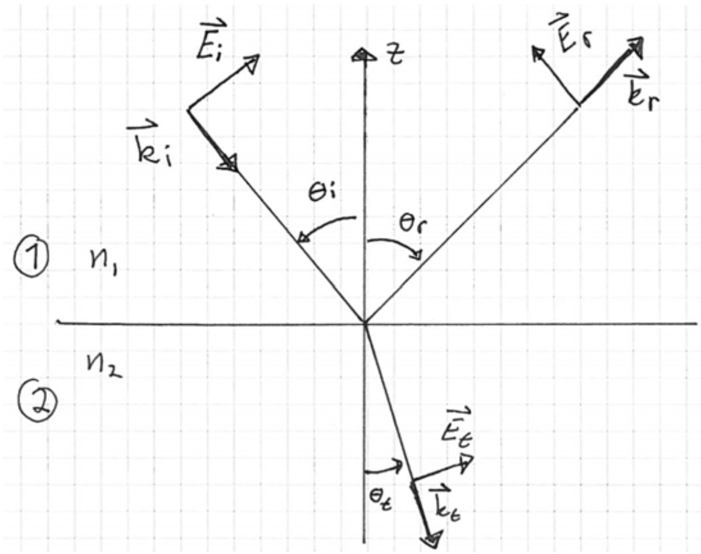
En plan EM bølge i nondispersivt transparent medium er gitt ved

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)\,,\ \mathbf{B}(r,t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)\,,$$

der **E** er det elektriske feltet og **B** det magnetiske feltet.

a) [5p] Vis at $\mathbf{E}_0 \perp \hat{\mathbf{k}}$, der $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, og vis at $\mathbf{B} = \frac{1}{\mathrm{v}}\left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}\right)$.

b) [6p] En elektromagnetisk plan p-polarisert bølge (dvs. **E**-vektor i innfallsplanet) har innfall (innfallsvinkel θ_i) på en plan isotrop overflate med brytningsindekser n_1 og n_2, se Figur 3.1. Ved hjelp av grensebetingelser er det gitt at $\mathbf{k}_{\parallel,i} = \mathbf{k}_{\parallel,r} = \mathbf{k}_{\parallel,t}$ (der i, r, t står for innfallende, reflektert og transmittert bølge). Utled dermed *refleksjonsloven* og *brytningsloven* i sin mest generelle form.



Figur 3.1. Geometri for oppgave 3b. Figuren viser en plan bølge med skrått innfall mot en plan isotrop flate som skiller medier med brytningsindeks n_1 ($z > 0$) og n_2 ($z < 0$). Innfallsvinkel θ_i, refleksjonsvinkel θ_r, brytningsvinkel θ_t , bølgetallsvektorene $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r$ og $\mathbf{k}_t$, og E-feltvektorene $\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t), \mathbf{E}_r(\mathbf{r},t)$ og $\mathbf{E}_t(\mathbf{r},t)$ er merket i figuren.

c) [5p] En plan EM bølge er gitt av:

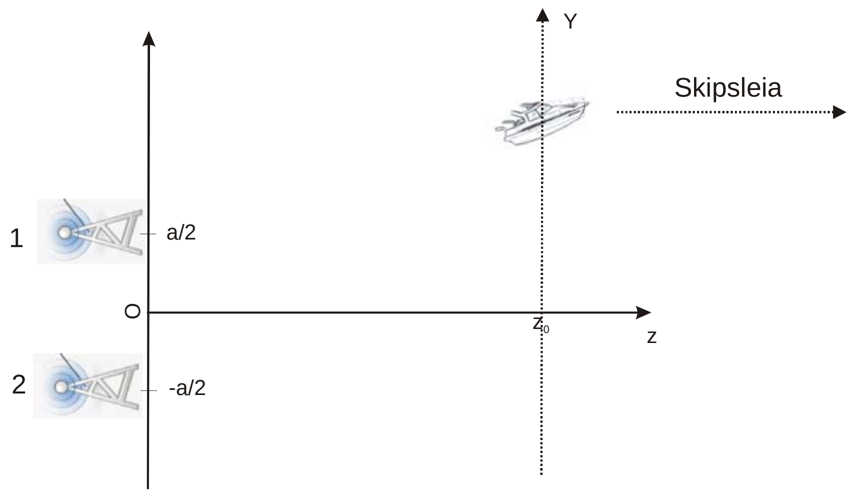
$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}} + E_0 \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})\hat{\mathbf{y}}$$

Vis at dette gir en sirkulærpolarisert polarisasjonstilstand, og finn hvilken retning denne har (dvs: med eller mot klokka) når en ser inn i strålen langs *z*-aksen (dvs: mot bølgens forplantningsretning).

d) [4p] Anta at du ser på en lysstråle med sirkulær polarisasjonstilstand. Du setter nå en lineær polarisator (”polarisasjonsfilter” slik som utdelt i forelesningene til øvingsoppgavene) foran øyet og roterer sakte ”transmisjonsaksen” til denne. Hvordan vil intensiteten du observerer bli som funksjon av rotasjonsvinkelen?

Oppgave 4 [24p] Interferens og dopplereffekt

Anta at en båt er i tett tåke. Vi skal undersøke om vi kan bruke signalstyrken (tidsmidlet intensitet) fra to GSM-antenner til å geleide oss gjennom ei "skipslei" (f.eks. kan man se på signalstyrkedisplayet på mobiltelefonen). Vi antar at de to antennene sender ut EM bølger med frekvens 2.1 GHz (mikrobølger i 3G bandet), har en avstand a fra hverandre, og sender med et konstant faseskift φ_1 og φ_2 i en harmonisk bølge ($\cos(kr - \omega t + \varphi_i)$). Disse antennene er plassert langs kysten, og vi ser på signalstyrken på mikrobølgemottakeren på en båt. Avstanden fra antennene til båten er $r_1, r_2 >> a$, slik at vi kan anta omtrent parallelle stråler. Videre kan du anta små vinkler mellom r_1, r_2 og z-aksen, se Figur 4.1.



Figur 4.1. To antenner sender ut kulebølger med forskjellige fasekonstanter φ_1 og φ_2. Origo er merket **O** i figuren. Avstanden til båten er mye større enn a, og vi antar at båten er nær z-aksen (dvs. små vinkler). Aksen loddrett på z benevnes Y.

a) [10p] Utled et tilnærmet uttrykk for signalstyrken (tidsmidlet intensitet) <I(Y,z)> registrert av mottaker på båten, som funksjon av a, λ, z, Y, φ_1 og φ_2 .

(Hint: For trigonometrisk løsning oppgis det at $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$.
For kompleks løsningsmetode, dvs. E-feltet skrevet som
$E_0\cos(kx - \omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left\{E_0 e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\right\}$, er det oppgitt at $\left(1+e^{i\alpha}\right) = 2e^{i\alpha/2}\cos\frac{\alpha}{2}$.)

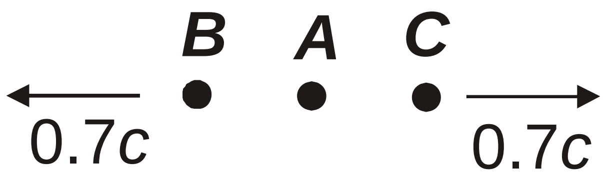
b) [8p] Båten beveger seg nå ved $z = z_0$ langs Y-aksen (perpendikulært på skipsleia). Skisser signalstyrken som funksjon av Y. Gitt at z_0 = 10 km, a = 100 m og f = 2.1 GHz, hvilken avstand vil det være mellom to nærliggende maksima i signalstyrke?

(Merk: Her gjør vi grove tilnærminger som kun er gyldig nær z-aksen. Dette medfører at vi for eksempel kan sette $\sin(\theta) \approx \theta \approx Y/z$).

c) [6p] Med kreativitet vil man prøve å måle båtens hastighet ved hjelp av dopplereffekten, ved å sende ut mikrobølger med frekvens f_0 = 200 GHz fra antenne 1 i Figur 4.1, og måle frekvensen f_2 reflektert fra båten med en detektor, også plassert ved antenne 1. Vi antar at båten beveger seg radielt bort fra antenne 1 med hastighet v. Finn et uttrykk for den relative forandringen i frekvens (dopplerskiftet) $(f_2 - f_0)/f_0$ på den målte reflekterte bølgen. Er den målte frekvensen mot høyere eller lavere frekvenser (relativt den utsendte frekvensen f_0)?

Oppgave 5 [10p] Spesiell relativitetsteori.

Vi ser på tre galakser A, B og C. En observatør i A måler hastighetene til C og B og finner at disse beveger seg i motsatt retning av hverandre, hver med en hastighet 0.7*c* relativt A, se Figur 5.1, der *c* er lysets hastighet. Hva er hastigheten til A og C observert av en observatør i galakse B?



Figur 5.1. Galaksene B og C, med deres hastigheter, observert/målt i inertialsystemet A.

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^{\gamma} = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_{\text{O}} = \frac{1 - v_{\text{O}}/v}{1 - v_{\text{S}}/v}\, \nu_{\text{S}}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_{\text{S}}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$
- Magnetisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$
- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$
- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$
- Malus' lov:
$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$
- Lineære medier:
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}
\Delta D_\perp &= 0 \\
\Delta E_\parallel &= 0 \\
\Delta B_\perp &= 0 \\
\Delta H_\parallel &= 0
\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0\, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter, spaltebredde a, spalteavstand d:

$$I(\theta) = \hat{I}\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\left(x - vt\right) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\left(\overline{x} + v\overline{t}\right) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$