1

LØSNINGSSKISSE EKSAMEN TFY4180 13/5-04

OPPGAVE 1

a) $\rho(r) = \rho_0\left(1-\frac{r}{R_1}\right)$, $\rho_0 = \frac{3Q_1}{\pi R_1^3}$

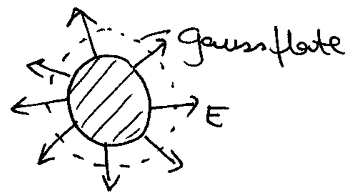
Total ladning:

$$\underline{\underline{Q_{tot}}} = \int_0^{R_1} \rho(r)\,\underset{4\pi r^2 dr}{dV} = \int_0^{R_1} \rho_0\left(1-\frac{r}{R_1}\right)\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3Q_1}{\cancel{\pi} R_1^3}\cdot 4\cancel{\pi}\left[\int_0^{R_1} r^2 dr - \int_0^{R_1}\frac{r^3}{R_1}dr\right]$$

$$= \frac{12Q_1}{R_1^3}\cdot\left[\frac{1}{3}R_1^3 - \frac{1}{4}R_1^3\right] = \frac{12Q_1}{R_1^3}\frac{R_1^3}{12} = \underline{\underline{Q_1}} \quad \text{qed}$$

Det elektriske feltet:

$\underline{r > R_1}$ (utenfor) ; $Q_{end} = Q_1$



Gauss lov: $\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$

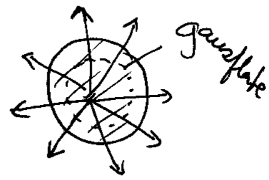
$\vec{E}$ er konstant på Gaussflata ; $\vec{E} \parallel d\vec{A}$.

$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$, som for punktladning.

$\underline{r < R_1}$ (innenfor)

$$Q_{end} = \int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R_1}\right)\cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 dr - \int_0^r \frac{r^3}{R_1}dr$$

$$= 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_1}\right)$$



Gauss lov: $\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q_{end}}{\varepsilon_0} = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_1}\right)$

$$E\cdot \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi}\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_1}\right)$$

$$\vec{E}(r) = \rho_0\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R_1}\right) = \frac{Q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(4 - \frac{3r}{R_1}\right)\hat{e}_r$$

Altså;

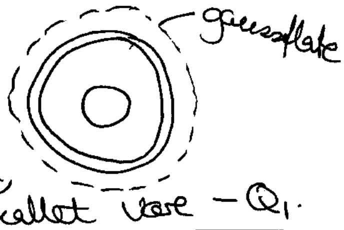
$$\underline{\underline{\vec{E}(r)}} = \begin{cases} \frac{Q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(4 - \frac{3r}{R_1}\right)\hat{e}_r & r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r & r > R_1 \end{cases}$$

retning radielt utover

Max der $\frac{\partial E}{\partial r} = 0 = \frac{Q_1 4}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} - \frac{Q_1 2r\cdot 3}{4\pi\varepsilon_0 R_1^4} \Rightarrow 4 = \frac{6r}{R_1} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{2}{3}R_1}}$

$$E_{max} = \frac{Q_1 \cdot \frac{2}{3}R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(4 - \frac{3\cdot\frac{2}{3}R_1}{R_1}\right) = \frac{Q_1 4}{4\pi 3\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{Q_1}{3\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

b) Kula er ledende.



Hvis det elektriske feltet utenfor skal være null, må ladningen innenfor ei Gaussflate som gitt på fig. være null, dermed må ladningen på det ytre skallet være $-Q_1$.

Det elektriske feltet for alle r:

Nå har vi at ladningen på den indre kula legger seg på overflata; og $E=0$ inni lederen. Det elektriske feltet blir da:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r, & R_1<r<R_2 \quad \text{(som i a))} \\ 0 & r>R_2 \end{cases}$$

Finner kapasitansen:

$C=\frac{Q}{V}$ Vi må finne V fra det elektriske feltet mellom R_1 og R_2. $E(r)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$V = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right]$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right]$$

$$C = \frac{Q_1}{V} = \frac{\cancel{Q_1}\,4\pi\varepsilon_0}{\cancel{Q_1}}\left[\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right] = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)$$

Tallsvar: $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{0,00998\text{m}}{0,01\text{m}} = 110\text{pF}$

c) Den halvfulle kondensatoren blir nå ekvivalent til en parallellkopling av to kondensatorer, en med vakuum (Ø) og en med væske (N). (De får forskjellig ladning, men har samme potensiale!) Ø=øvre, N=nedre

Da har vi at $C_{tot} = C_Ø + C_V = \frac{\varepsilon_r C_0}{2} + \frac{C_0}{2}$ med $C_0 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)$

Det blir: $C_{tot} = 2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)$

Skal finne det elektriske feltet mellom de to lederne.

Bruker Gauss lov på to halvkuler ($Ø$ = øvre. N = nede)

Gaussflata ligger mellom kulene; når E-feltet er radielt, betyr det at kun halvkula gir bidrag (ikke flata under)

Oppe: $\int \vec{E}_Ø d\vec{A} = \frac{Q_Ø}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_Ø \cdot \frac{4\pi r^2}{2} = \frac{Q_Ø}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_Ø = \frac{Q_Ø}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

nede: $\int \vec{E}_N d\vec{A} = \frac{Q_N}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \Rightarrow E_N \cdot \frac{4\pi r^2}{2} = \frac{Q_N}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \Rightarrow E_N = \frac{Q_N}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}$

Må så finne ladningen på øvre og nedre halvkule. Vi har at total ladning $Q_Ø + Q_N = Q_1$, og at $C_Ø = \frac{Q_Ø}{V}$ og $C_N = \frac{Q_N}{V}$

Kan da finne Q_N og $Q_Ø$ uttrykt ved Q_1:

$$Q_N = \frac{V C_0 \varepsilon_r}{2} = \varepsilon_r Q_Ø = \varepsilon_r (Q_1 - Q_N) \Rightarrow Q_N(1+\varepsilon_r)$$

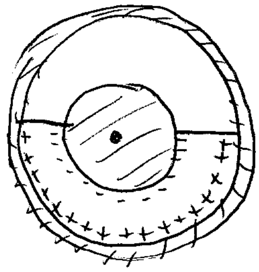
$$\underline{\underline{Q_N = \frac{\varepsilon_r Q_1}{1+\varepsilon_r}}}, \quad \underline{\underline{Q_Ø}} = Q_1 - Q_N = \frac{Q_1 + Q_1\varepsilon_r - \varepsilon_r Q_1}{1+\varepsilon_r} = \underline{\underline{\frac{Q_1}{1+\varepsilon_r}}}$$

Setter dette inn i uttrykket for $E_Ø$ og E_N:

$$E_Ø = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r^2(1+\varepsilon_r)} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_N = \frac{Q_1\cancel{\varepsilon_r}}{2\pi\varepsilon_0\cancel{\varepsilon_r} r^2(1+\varepsilon_r)} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon_r}\right)\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

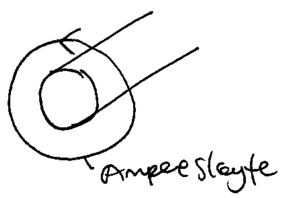
Vi ser at feltet er like stort i de to halvdelene!*



Induserte ladninger legger seg som på figuren; inni dielektrikumet har vi bundne ladninger som vil svekke det opprinnelige feltet noe, men ladningen på lederne vil kompensere dette –

* Det at det elektriske feltet er likt stort i øvre og nedre halvkule er logisk – i og med at potensialet er likt (ledere er alltid ekvipotensialflater!)

OPPGAVE 2

a) 

Bruker Amperes lov $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = I_{enc}\mu_0$

For $r > R$:

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \underline{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

For $r < R$ vil strømmen innenfor være avhengig av r: $I_{encl} = I\left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right) = I\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$

I gauss lov gir dette

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I\cdot\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow \underline{B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$$

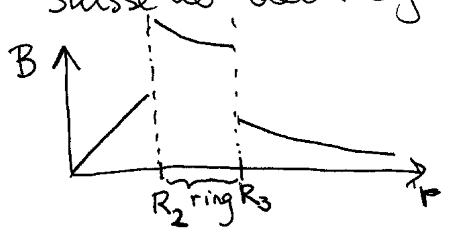
Retningen på det magnetiske feltet er på sirkler rundt lederen; iflg. høyrehåndsregelen; normalt på flatenormalen.

Med jernring for $r > R$ får vi $\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I$; $H\cdot 2\pi r = I$

$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow$ Med $H = B/\mu$ får vi $\underline{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} = \underline{\underline{\frac{\mu_r\mu_0 I}{2\pi r}}}$

Magnetfeltet blir større.

Skisse av det magnetiske feltet, med jernring:



b) Motstand er gitt ved $\rho\frac{L}{A} = \frac{\rho L}{\pi R^2} = \frac{V}{I}$ (siste iflg. Ohms lov)

Kan da finne $\underline{\underline{V = \frac{\rho L I}{\pi R^2}}}$

Setter inn tallverdier; $\underline{\underline{V}} = \frac{2{,}82\cdot 10^{-8}\,\Omega m\cdot 400\,m\cdot 35A}{\pi\cdot(0{,}005\,mm)^2} = \underline{\underline{5{,}0V}}$

c) Bruker Faradays lov for å bestemme indusert ems i spolen; må først finne magnetisk fluks:

Har (fra over) at $B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$, som gir $\Phi_B = \int \vec{B}\, d\vec{A} = \int_{4.5m}^{5m} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\cdot L\,dr$

$$= \frac{\mu_0 I(t)\cdot L}{2\pi}\int_{4,5m}^{5m}\frac{dr}{r} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 800A\cdot 2m\,\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{5m}{4.5m} = 3{,}3\cdot 10^{-5}\sin(\omega t) \text{ for hver vikling}$$

Indusert ems er $\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\cdot 3{,}3\cdot 10^{-5}\,Wb\cdot \overset{2\pi f}{\omega}\cos\omega t = -5{,}3V\cos\omega t$ totalt.

Maxverdi av indusert ems blir $\underline{\underline{\varepsilon_0 = 5,3\,\text{V}}}$.

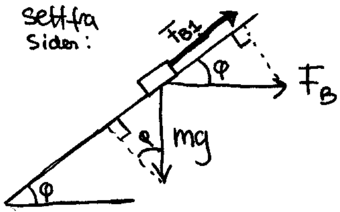
Studentene kunne fått litt mer spenning ut ved å sette spolen på høykant ▯, men den ~~står~~ allerede optimalt i øst-vest-retning fordi magnetfeltlinjene fra kabelen kommer normalt inn gjennom spolen. Den skal altså ikke vris mot nord eller sør. (Vi antar her at den skulle plasseres i en vinkel)

OPPGAVE 3

Når staven starter å gå, vil fluksen gjennom sløyfa synke, slik at strømmen i staven vil gå for å øke fluksen nedover – fra a til b.

Når staven har konstant fart, må magnetisk kraft være den samme som gravitasjonskraft (men motsatt rettet) i bevegelsesretningen. Magnetisk kraft har retning som vist på figuren ($\vec{F_B} = I\vec{L}\times\vec{B}$)

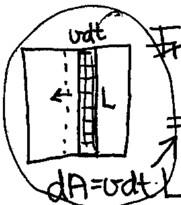
sett fra siden:



Må se på komponentene i bevegelsesretningen:

$$F_{B1} = F_B\cos\varphi = ILB\cdot\cos\varphi$$

~~Finner ε v.h.a. Faradays lov:~~ $\cancel{|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = B\frac{dA}{dt} = B\cdot\frac{v\,dt\,L}{dt} = BvL}$, ~~som gir~~ $\cancel{F_{B1} = \frac{B^2L^2v}{R}\cos\varphi}$



Gravitasjonskraften $= mg\sin\varphi$

Setter disse lik hverandre og får: $ILB\cdot\cos\varphi = mg\sin\varphi$

$$I = \frac{mg}{LB}\cdot\tan\varphi$$

For å finne farten må vi sette inn for indusert ems:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{d\Phi_B}{dt}\frac{1}{R} = \frac{\vec{B}}{R}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{B}{R}\cdot\frac{v\,dt\,L}{dt}\cdot\cos\varphi = \frac{BvL}{R}\cdot\cos\varphi$$

$$I = \frac{mg}{LB}\tan\varphi = \frac{BvL}{R}\cdot\cos\varphi \Rightarrow \underline{\underline{v = \frac{Rmg}{(LB)^2}\cdot\frac{\tan\varphi}{\cos\varphi}}}$$

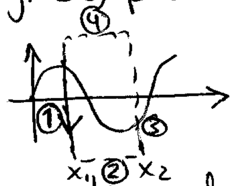
Her hadde jeg først laget spørsmålet litt annerledes – derfor litt rot her – men det som står skal være rett!!

OPPGAVE 4

Denne er meget lik eksamensoppg. 3c) fra 7.mai 2001!

Bølgehastighet $c = \frac{\omega}{k}$

Bølgelengden $\lambda = \frac{2\pi}{k}$



Vi bruker Faradays lov og integrerer langs den stipla linjen i figuren. ② og ④ bidrar ikke, da $\vec{E} \perp d\vec{l}$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = \int E_y(x_2)\,dy - \int E_y(x_1)\,dy = E_0\left[\cos(\omega t - kx_1) - \cos(\omega t - kx_2)\right]\int dy$$

$$= E_0 L \cdot \left[\cos(\omega t - kx_1) - \cos(\omega t - kx_2)\right]$$

Magnetisk fluks gjennom denne flata er gitt ved:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\, d\vec{A} = \int B \cdot dx\,dy = B_0 \cdot L \cdot \int_{x_1}^{x_2} \cos(\omega t - kx)\,dx = B_0 L \frac{1}{k}\left[\sin(\omega t - kx)\right]_{x}^{x}$$

$$= B_0 \frac{L}{k}\left[\sin(\omega t - kx_2) - \sin(\omega t - kx_1)\right]$$

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = B_0 \frac{L}{k} \cdot \omega \cdot \left[-\cos(\omega t - kx_2) + \cos(\omega t - kx_1)\right]$$

Faradays lov: $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$

$$E_0 \cdot L \cdot \left[\cos(\omega t - kx_1) - \cos(\omega t - kx_2)\right] = B_0 \frac{L}{k} \omega \left[\cos(\omega t - kx_1) - \cos(\omega t - k\right.$$

$$\Rightarrow E_0 \cancel{L} = B_0 \frac{\cancel{L}}{k} \omega \Rightarrow \underline{\underline{E_0 = cB_0}} \quad \text{qed.}$$

Det er kanskje enklere å bruke differensialformen; regn ut $\nabla \times \vec{E}$ og $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ og sett den lik hverandre!