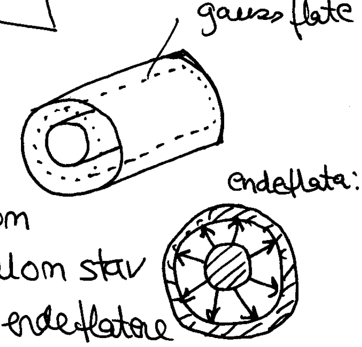
LØSNINGSSKISSE EKSAMEN TFY4180 31. MAI 2005



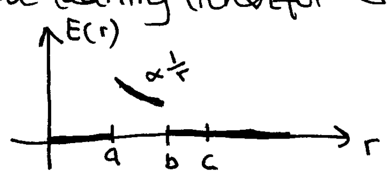
1 a) Gausslov: $\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{end}}{\varepsilon_0}$

Bruker en sylindrisk Gaussflate, som legges konsentrisk rundt staven, mellom stav og sylinder, med radius r. Gjennom endeflatene på sylinderen e det ikke fluks - bare sideflata bidrar. Her er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ slik at $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. I tillegg er E konstant for en gitt r. Vi får:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot \oint dA = E(r) \cdot L \cdot 2\pi r = Q_{end}/\varepsilon_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$, areal på sylinder er $L \cdot 2\pi r$

$Q_{end} = Q$ fordi det e ladningen på staven, som nå er innenfor Gaussflata. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}}}$ $\hat{r}$ ed

Retningen til $\vec{E}(r)$ er radielt utover, langs $\hat{e}_r$, som vist på figuren. Siden staven og sylinderen begge er ledere, vil E-feltet inni dem være 0. Også utenfor, da total ladning innenfor er 0. Altså:



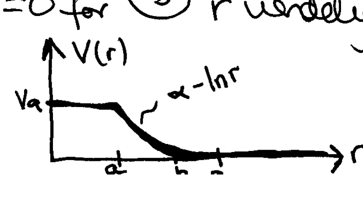
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{e}_r & a<r<b \\ 0 & b<r<c \\ 0 & r>c \end{cases}$$

b) Elektrisk potensial: Inni staven må V være konstant; også utenfor indre radius av sylinderen, så det neste stedet V varierer med r er $r \in \langle a, b \rangle$

$$\underline{\underline{\Delta V}} = V_r - V_b = -\int_b^r \vec{E} d\vec{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^r \frac{dr}{r} = \underline{\underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{r}}}$$

Siden V=0 for r uendelig, må V=0 for r>b

Skisse:



Spenningen over kondensatoren:

$$V_{ab} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

Kapasitansen: $C_0 = \frac{Q}{V_{ab}} = 2\pi\varepsilon_0 L\cdot\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}$

c) Kondensatoren blir nå en parallellkopling av to kondensatorer med to forskjellige høyder og relative permittiviteter.

over vann: $C_1 = 2\pi\varepsilon_0(L-z)\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}$

under vann: $C_2 = 2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 z\cdot\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}$

Total kapasitans: $C_z = C_1 + C_2 = 2\pi\varepsilon_0(L-z)\frac{1}{\ln\frac{b}{a}} + 2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 z\frac{1}{\ln b/a} = (2\pi\varepsilon_0/\ln b/a)\cdot(L - z + \varepsilon_r z) = (2\pi\varepsilon_0/\ln b/a)\cdot[L + z(\varepsilon_r - 1)]$

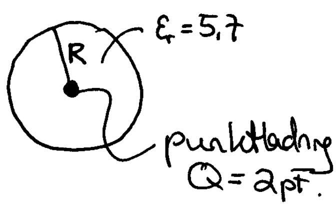
Hvis $C_z = 10C_0$ får vi: $(\cancel{2\pi\varepsilon_0}/\cancel{\ln b/a})[L + z(\varepsilon_r - 1)] = \frac{\cancel{2\pi\varepsilon_0} L}{\cancel{\ln b/a}}\cdot 10$

$L + z(\varepsilon_r - 1) = 10L \Rightarrow z = \frac{9L}{\varepsilon_r - 1}$

Hvis $L = 0{,}1$ m og $\varepsilon_r = 80$ får vi $z = \frac{9\cdot 0{,}1\,\text{m}}{79} = 1{,}14\,\text{cm}$

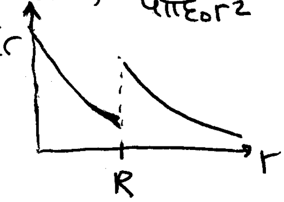
Spenningen over kondensatoren $V = \frac{Q}{C_z} = \frac{Q}{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}(\varepsilon_r z + L - z)}$ vil minke med ladningen konstant, fordi kapasitansen øker. Polarisasjon i vannet skaper skjerming og minsker vekselvirkninger.

2



Ved Gauss lov finner vi at $\vec{E}(r) = \frac{Q\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$ inni kula. Utenfor er det $\vec{E}(r) = \frac{Q\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Skisse av E-feltet blir



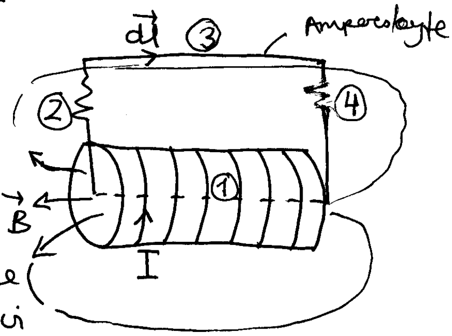
Vi har at overflateladningen er gitt av polarisasjonen $-\sigma_i = \vec{P}\cdot\hat{e}_r$, må finne $\vec{P}$ uttrykt ved $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

Indusert ladningstetthet σ_i blir da; med $r=R$

$$\underline{\underline{\sigma_i}} = \vec{P}\cdot\hat{e}_r = (\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}\cdot\hat{e}_r = \frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 Q\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2}\cdot\hat{e}_r = \frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^2}$$

$$= \frac{(5{,}7-1)\,2pF}{4\pi\cdot 5{,}7\cdot(0{,}1m)^2} = \underline{\underline{13{,}12\,\frac{pC}{m^2}}}$$



③ a) Amperes lov: $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$

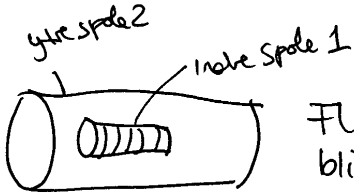
Lager integrasjonsvei som på figuren. For linje ② og ④ er $\vec{B}\perp d\vec{l}$ og gir ikke noe bidrag til integralet. For ③ har vi $\vec{B}=0$ om vi legger sløyfe langt ute, slik at bare ① vil bidra:

$$\oint\vec{B}d\vec{l} = \int_{①}\vec{B}d\vec{l} + \underbrace{\int_{②}\vec{B}d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_{③}\vec{B}d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_{④}\vec{B}d\vec{l}}_{=0} = B\cdot l = N_1 I\mu_0$$

$$\underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I N_1}{l}}}$$ Retning som vist på figuren.

tallsvar: $\underline{\underline{B = 7{,}85\cdot 10^{-3}T}}$

b)



Fluksen gjennom den innerste spolen (2) blir: $\Phi_{21} = A_2\cdot B_1 = \pi r_2^2\cdot B_1 = \pi r_2^2\cdot\frac{\mu_0 I N_1}{l}$

Den induserte emsen i denne spolen blir da:

$$\varepsilon_{21} = -N_2\cdot\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial t} = -N_2\cdot\pi r_2^2\cdot\frac{\mu_0 N_1}{l}\cdot\frac{\partial I_1}{\partial t} \underset{\text{pr def!}}{=} -M\frac{\partial I_1}{\partial t}$$

Den gjensidige induktansen er da: (setter $r_2 = d_2/2$)

$$M = M_{12} = \mu_0\pi\cdot\left(\frac{d_2}{2}\right)^2\cdot N_1 N_2\cdot l^{-1}$$

9.25·10-7

tallsvar: $\underline{\underline{M = \cancel{2{,}95\cdot 10^{-7}}\,H}}$

c) Den induserte emsen i spole 2 blir da

-1.8·10-4

$$\underline{\underline{\varepsilon_{21}}} = -M\cdot\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\mu_0\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 N_1 N_2 l^{-1}\cdot\frac{dI}{\partial t} = \underline{\underline{\cancel{5{,}9\cdot 10^{-5}}\,V}}$$

d) Magnetfeltet inni spolen er gitt fra a), men med relativ permeabilitet (siden vi har jernkjerne); $B = \mu_r\mu_0 I N_1 l^{-1}$

Fluks gjennom spolen blir da:

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = B \cdot \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \mu_r \mu_0 I \cdot N_1 l_1^{-1} \cdot \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$

Vi finner indusert ems ved å bruke Faradays lov:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_r \mu_0 I(t) \cdot N_1 l_1^{-1} \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2\right]$$

Setter inn $I(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$, og får: $\left(\frac{d}{dt}(I_0 \sin \omega t) = I_0 \omega \cos \omega t\right)$

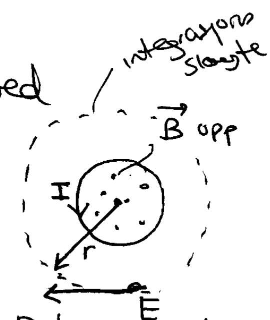
$$\mathcal{E} = -\mu_r \mu_0 N_1 l_1^{-1} \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Det induserte elektriske feltet er gitt ved

$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l}$. E er konstant ved gitt r:

$\vec{E} \parallel d\vec{l} = d\vec{r}$;

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} = E \cdot \oint dl = E \cdot 2\pi r$$



Det induserte elektriske feltet er tangent til sirkelen. Retningen vil variere og er gitt ved Lenz lov

$$\underline{\underline{E}} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -\mu_r \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \cancel{\pi} \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 I_0 \frac{\omega \cos \omega t}{2\cancel{\pi} r}$$

$$= -\frac{\mu_r \mu_0 N_1 d_1^2 \cdot I_0 \cdot \cancel{2}\pi f \cdot \cos \omega t}{l_1 \cdot 4 \cdot \cancel{2} \cdot r}$$

$$= -\underline{\underline{\frac{\mu_r \mu_0 N_1 d_1^2 \cdot I_0 \pi \cdot f}{4 l_1 r} \cos \omega t = -E_0 \cos \omega t}}$$

Amplitude; $f = 50\text{Hz}$, $I_0 = 5A$, $\mu_r = 2000$, $l_1 = 0{,}4\text{m}$, $d_1 = 0{,}02\text{m}$
$N_1 = 500$; $r = 0{,}04\text{m}$.

Satt inn tallverdier blir amplituden lik $\underline{\underline{6{,}16 \text{ V/m}}}$

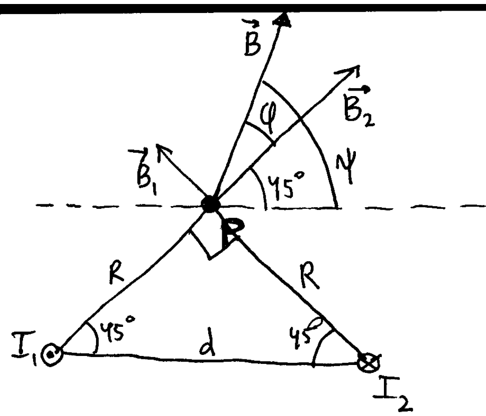
Feltet kan måles ved for eks. å legge en krets der og måle indusert ems.

(4) Magnetfeltet rundt en rett leder er gitt ved $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$ i avstand. Vi får da $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$ og $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$ i P.

Det totale B-feltet blir da

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}, \quad R = d \cdot \cos 45^\circ = d\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\mu_0 \cdot 2}{2\pi d \cdot \sqrt{2}} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\cancel{\pi} \cdot 91 \cdot \sqrt{2}} \sqrt{15^2 + 32^2}\ T = \underline{\underline{100 \mu T}}$$



Retningen er gitt ved (5)

$$\tan\varphi = \frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{15}{32} \Rightarrow \varphi = 25°$$

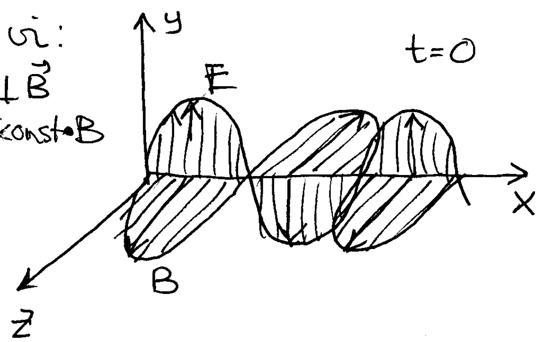
$$\underline{\psi} = 45° + 25° = \underline{70°}$$

B-feltet i punkt P har vinkel 70° med horisontalplanet.

(5) For en plan elektromagnetisk bølge har vi at $\vec{E} \perp \vec{B}$ og $E_0 = vB_0$ for at Amperes og Faradays lov skal tilfredsstilles. I vakuum har vi at $E_0 = cB_0$.

Hvis $B_z = B_0 \sin(\omega t - kx)$ har vi:

Vi ser at $\vec{E} \perp \vec{B}$
og at $E = \text{konst} \cdot B$



For vakuum har vi $E_0 = cB$,
og hvis $B_0 = 500 \mu T$, blir
$E_0 = 3 \cdot 10^8 \, m/s \cdot 500 \mu T = \underline{150 \, kV/m}$

Poyntingvektoren har retning langs bølgens forplantningsretning.
Størrelse: $|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = \cancel{5{,}97 \cdot 10^4} \; W/m^2$
5.97·10⁻⁷

Amplituden med samme B_0 i glass med $n = 1{,}5$ ville blitt
$v = \frac{c}{n}$ $\quad \underline{E_0'} = vB_0 = \underline{100 \, kV/m}$.

NB! Dette er ufysisk store felt!! Skulle vært $\underline{500 \, nT}$!