Institutt for fysikk 2006

# TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
# Eksamen 30.mai 2006. Løsningsforslag

**Oppgave 1. Flervalgsspørsmål**

| Oppgave: | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rett svar: | C | A | A | D | E | D | B | A | D | C | A | E |

**Detaljer om spørsmålene:**

**a)** C. $E = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ gir at 3 er riktig. Det er fritt valgt referansepunkt for $V$ men ikke for $E$, slik at $E$ ikke kan være null når $V$ øker. B er derfor ikke mulig.

**b)** A. Feltfritt i ledere og i ladningsfrie hulrom inni ledere, slik at 2 og 3 forkastes. Feltlinjer skal overalt stå normalt på lederoverflater. 1 er OK.

**c)** A. Fra tips: Kravet $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ på kvadratet er oppfylt kun for A. F.eks. for B får vi et positivt bidrag på høyre sidekant som ikke oppveies av venstre sidekant. Tilsvarende for C, D og E.
Alternativ fra kravet om curlfritt $\vec{E}$-felt: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ som når $E_y = 0$ og $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ gir $\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} = \vec{0}$. $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$ er oppfylt bare for A.

**d)** D. Gauss lov: $\epsilon_0 2\pi r \cdot \ell \cdot E(r) = \lambda \cdot \ell$ gir $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$.

**e)** E. Resistans $R = \ell \cdot \rho / A$ der A er tverrsnittsareal. Dobling av diameter gir firedobling av $A$ og fjerdeparten $R$.

**f)** D. Sentripetalakselerasjon: $F = mv^2/r$. Magnetisk kraft: $F = qvB$. Disse satt like gir $r = mv/(qB)$.

**g)** B. Med krysset el. og magn. felt virker elektrisk og magnetisk kraft i motsatt retning. Når det akkurat ikke er avbøyning er Lorentzkrafta $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$. Altså $v = E/B$ gjelder for alle partikler, altså må de ha samme fart.

**h)** A. Når magneten nærmer seg strømsløyfa øker magnetfluksen nedover inni sløyfa. Ifølge Lenz' lov settes opp en strøm som motvirker økningen, og ifølge høyrehåndsregelen må strømmen gå i positiv retning gitt i figuren. Når magneten er midt i øker ikke fluksen lenger, for deretter å avta. Da blir strømretningen motsatt. Altså figur 1 rett.

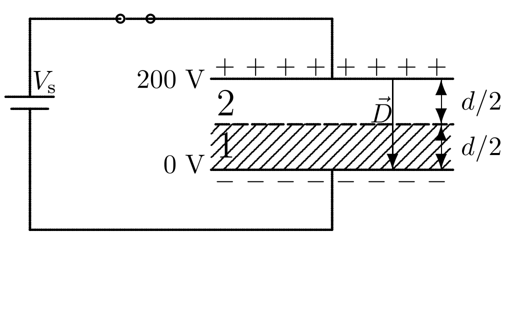
**i)** D. Sammenlikning med bølgefunksjonen $E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{1}{\lambda}(x - t \cdot v))$ gir $\lambda = 2/(2,4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1}) = 8,33 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

**j)** C. Frekvensen $f$ er alltid uendra mens hastigheten $v$ endres og dermed bølgelengden $\lambda = v/f$ og bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$.

**k)** A. Snells brytningslov, med 0=luft og 1=væske: $1,00 \cdot \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$. Vi leser av figuren $\sin\theta_1 \approx 2,2/\sqrt{4^2 + (2,2)^2} = 0,48$ og $\sin\theta_0 \approx 4/\sqrt{3^2 + 4^2} = 0,80$. Fra sammenheng mellom brytningsindeks og lysfart får vi $c_1 = c_0/n_1 = c_0 \cdot \sin\theta_1/\sin\theta_0 = 3,00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 0,60 = 1,80 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. A er nærmest.

**l)** E. $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er alltid i fase i vakuum. Derfor E feil mens alle andre er rett.

**Oppgave 2. Parallellplatekondensator**




a) Elektrisk flukstetthet $D$ er gitt av frie ladninger, som vi har kun på metallplatene (i grenseflata mellom 1 og 2 er det kun bundet ladning). Disse er vist med + og − i figuren. Da er $D$ lik i begge materialer: $D_1 = D_2 \equiv D$.

Vi har gitt at potensialet over begge deler er

$$200\,\mathrm{V} = V_\mathrm{s} = -\int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E_1 \cdot d/2 + E_2 \cdot d/2\,.$$

Sammenhengen mellom $\vec{E}$ og $\vec{D}$ er de kjente:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{r},1}\epsilon_0}\vec{D} \quad \text{og} \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{D}\,,$$

og dette gir
$$\frac{D}{\epsilon_{r,1}\cdot\epsilon_0}\frac{d}{2}+\frac{D}{\epsilon_0}\frac{d}{2}=V_s \quad\Rightarrow\quad D=V_s\cdot\frac{2}{d}\epsilon_0\cdot\frac{1}{1/\epsilon_{r,1}+1}=V_s\cdot\frac{2}{d}\cdot\frac{\epsilon_0\epsilon_{r,1}}{1+\epsilon_{r,1}}$$
og med tallverdier
$$D=200\,\mathrm{V}\cdot\frac{2}{5,0\,\mathrm{mm}}\cdot\frac{\epsilon_0\cdot 2,5}{1+2,5}=0,506\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}=\underline{0,51\,\mu\mathrm{C/m^2}}.$$

Da er
$$E_1=\frac{D}{\epsilon_{r,1}\cdot\epsilon_0}=22,86\,\mathrm{V/mm}=\underline{23\,\mathrm{kV/m}},\qquad \text{og}\quad E_2=\frac{D}{\epsilon_0}=57,14\,\mathrm{V/mm}=\underline{57\,\mathrm{kV/m}}.$$
Retning for $\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{D}_1$ og $\vec{D}_2$ er nedover.

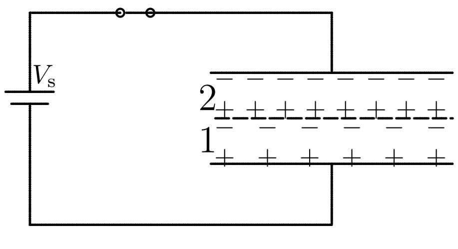
En alternativ løsning som mange brukte ved eksamen for å finne $D$ er å betrakte kondensatoren som en seriekopling av to kondensatorer og bruke kapasitans for parallellplatekondensator $C_1=\epsilon_0\epsilon_{r,1}A/d'$, der $d'=d/2$ og tilsvarende for $C_2$. Ved bruk av formel for seriekondensatorer får vi:
$$C_{\text{tot}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\epsilon_0\epsilon_{r,1}A/d'\cdot\epsilon_0\epsilon_{r,2}A/d'}{\epsilon_0\epsilon_{r,1}A/d'+\epsilon_0\epsilon_{r,2}A/d'}=\frac{\epsilon_{r,1}\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,1}+\epsilon_{r,2}}\cdot\epsilon_0\frac{A}{d'}\,.$$
Definisjon av kapasitans: $C_{\text{tot}}=Q/V_s$ og at elektrisk flukstetthet er lik (fri) ladning per flateenhet gir:
$$D=\frac{Q}{A}=\frac{C_{\text{tot}}\cdot V_s}{A}$$
som innsatt uttrykket for $C_{\text{tot}}$ ovenfor med $\epsilon_{r,1}=2,5$ og $\epsilon_{r,2}=1$ gir
$$D=\frac{\epsilon_{r,1}\cdot 1}{\epsilon_{r,1}+1}\cdot\epsilon_0\frac{1}{d'}\cdot V_s=\frac{2,5}{3,5}\cdot\epsilon_0\frac{1}{2,5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}\cdot 200\,\mathrm{V}=85,72\,\mathrm{V}\,.$$

b) Når spenningskilden er frakopla og vi ser bort fra lekkstrøm endres ikke mengden av frie ladninger, som betyr at $D_1=D_2=D$ forblir uendra. Feltstyrken endres da bare i medium 2:
$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_{r,1}\cdot\epsilon_0}=\frac{0,506\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}}{2,5\cdot\epsilon_0}=22,86\,\mathrm{V/mm},\qquad \text{(uendra), og} \tag{1}$$
$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_{r,2}\cdot\epsilon_0}=\frac{0,506\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}}{5\cdot\epsilon_0}=11,43\,\mathrm{V/mm}. \tag{2}$$
Dette gir at den nye potensialforskjellen blir
$$V_s=E_1\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}=57,15\text{ V}+28,58\text{ V}=85,72\text{ V}=\underline{86\text{ V}}.$$
Når et dielektrikum erstatter luft i en kondensator kan den lagre samme ladning med lavere potensialforskjell.

Alternativ løsning her også å bruke kapasitans: $C_{\text{tot}}$ er kapasitans i a) med tilhørende $V_s=200$ V og den nye kapasitansen er samme uttrykk som over men med $\epsilon_{r,2}=1,0$ erstatta av $\epsilon_{r,2}=5,0$. Løsning:
$$C_{\text{tot}}=\frac{Q}{V_s}\quad\text{og}\quad C_{\text{tot,ny}}=\frac{Q}{V_{\text{s,ny}}}\quad\Rightarrow\quad V_{\text{s,ny}}=V_s\cdot\frac{C_{\text{tot}}}{C_{\text{tot,ny}}}=V_s\cdot\frac{\frac{\epsilon_{r,1}\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,1}+\epsilon_{r,2}}}{\frac{\epsilon_{r,1}\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,1}+\epsilon_{r,2}}}=V_s\cdot\frac{\frac{2,5\cdot1,0}{2,5+\cdot1,0}}{\frac{2,5\cdot5,0}{2,5+\cdot5,0}}=V_s\cdot\frac{7,5}{3,5\cdot5,0}=85,7\,\mathrm{V}.$$

c) I dielektrika induseres dipoler som resulterer i en netto ladning ved hver grenseflate, dette er bundet overflateladning og den er lik polariseringen $|\vec{P}$. Fra $\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ finner vi
$$\sigma_{b,1}=|\vec{P}_1|=|\vec{D}-\epsilon_0\vec{E}_1|=0,506\,\mu\mathrm{C/m^2}-\epsilon_0\cdot 22,86\,\mathrm{kV/m}=0,304\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}=\underline{0,31\,\mu\mathrm{C/m^2}}.$$
$$\sigma_{b,2}=|\vec{P}_2|=|\vec{D}-\epsilon_0 E_2|=0,506\,\mu\mathrm{C/m^2}-\epsilon_0\cdot 11,43\,\mathrm{kV/m}=0,405\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}=\underline{0,41\,\mu\mathrm{C/m^2}}.$$

Alternative uttrykk er $\sigma_{b,1}=\epsilon_0|\vec{E}_1(\epsilon_{r,1}-1)|$ eller $\sigma_{b,1}=|\vec{D}(1-1/\epsilon_{r,1})|$, og tilsvarende for $\sigma_{b,2}$. Figuren under viser negativ bundet ladning ved den øvre positive metallplata og positiv bundet ladning ved den nedre negative plata. Differansen $0,10\,\mu\mathrm{C/m^2}$ er **netto** bundet ladning i grenseflata 1-2.




I materialene utenom overflatene er det induserte dipoler, men disse nuller hverandre ut slik at det blir **null** netto bundet ladning, dvs. ingen romladning. Matematisk kan dette uttrykkes ved at bundet romladning $\rho_b$ er lik divergensen i polariseringen: $\rho_b=-\text{div}\vec{P}$. Men $\vec{D}$ og $\vec{E}$ og dermed $\vec{P}$ er homogene (uavhengige av $x,y,z$) og derfor divergensfrie innenfor hvert materiale, derfor $\underline{\rho_b=0\,\mathrm{C/m^3}}$.

**Oppgave 3. Magnetfelt**

Her er det ikke nødvendig med mye regning. Vi trenger å innse følgende:

- Fra det oppgitte uttrykket for magnetisk flukstetthet på symmetriaksen til ei sirkulær strømsløyfe følger det at $B$-feltet i sentrum ($d = 0$) av ei sirkulær strømsløyfe med radius $R$ er $B = \mu_0 \frac{I}{2R}$.
- Enhver sirkelbue som spenner over en vinkel $\theta$ må da gi et bidrag $B(\theta) = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\theta}{360}$ til $B$-feltet i sentrum av sirkelen, når $\theta$ er gitt i °.
- De radielt rettede bitene av strømsløyfa gir null bidrag til $B$-feltet i sentrum. Det ser en av det oppgitte uttrykket for d$\vec{B}$, for da er $I \mathrm{d}\vec{s} \parallel \hat{\mathbf{r}}$, og dermed $I \mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \vec{0}$.
- Alle sirkelbuene fører strømmen $I$ i samme sirkulære retning. Høyrehåndsregelen (eventuelt inspeksjon av $I \mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ med $\hat{\mathbf{r}}$ retta radielt inn mot sentrum for alle strømelementer $I \mathrm{d}\vec{s}$) gir da at $\vec{B}$ i sentrum må ha retning ned i papirplanet.

Sirkelbuene ved radius $a$ spenner tilsammen over $15+20+75+40 = 150°$, ved radius $b$ over $55+50+65+40 = 210°$, så $B$-feltet i sentrum blir

$$B_{\mathrm{P}} = \mu_0 \frac{I}{2a} \frac{150}{360} + \mu_0 \frac{I}{2b} \frac{210}{360} = \mu_0 \frac{I}{24} \left( \frac{5}{a} + \frac{7}{b} \right)$$

med tallverdier

$$B_{\mathrm{P}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot \frac{4,0\,\mathrm{A}}{24} \left( \frac{5}{0,10\,\mathrm{m}} + \frac{7}{0,25\,\mathrm{m}} \right) = 10,5\,\mu\mathrm{T} + 5,8\,\mu\mathrm{T} = \underline{16,3\,\mu\mathrm{T}}.$$

(enheter: $[\mu_0] = \mathrm{H/m} = \mathrm{Tm/A}$)

Det var beklageligvis feil i oppgitt formel 1, med $IR$ i teller isf. $IR^2$ som er det rette. Med feilen blir $B = \mu_0 \frac{I}{2R^2}$ og følgende svar må også godkjennes (selv om enheten er feil):

$$B_{\mathrm{P}} = \mu_0 \frac{I}{2a^2} \frac{150}{360} + \mu_0 \frac{I}{2b^2} \frac{210}{360} = \mu_0 \frac{I}{24} \left( \frac{5}{a^2} + \frac{7}{b^2} \right) = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot \frac{4,0\,\mathrm{A}}{24} \left( \frac{5}{(0,10\,\mathrm{m})^2} + \frac{7}{(0,25\,\mathrm{m})^2} \right) = \underline{128\,\mu\mathrm{T/m}}.$$

Alternativt kan $B_{\mathrm{P}}$ finnes fra oppgitte Formel 2 (som er Biot-Savarts lov også oppgitt på formelarket). Med d$\vec{s}$ langs sirkelbuen vil denne være normal på radiusvektor slik at

$$\mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathrm{d}s = 2\pi r \frac{\mathrm{d}\theta}{360},$$

der $r$ er aktuell radius ($a$ eller $b$) og d$\theta$ vinkelen i grader. Integralet løper stykkevis med totalt $\mathrm{d}\theta = 150°$ og $\mathrm{d}\theta = 210°$ for henholdsvis $a$ og $b$ som over, slik at svaret blir

$$B_{\mathrm{P}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \int_a \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \int_b \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{2\pi a \cdot 150}{a^2 \cdot 360} + \frac{2\pi b \cdot 210}{b^2 \cdot 360} \right) \qquad \text{osv. som ovenfor.}$$

**Oppgave 5. Solenoide**

a) Når $H$ er oppgitt blir magnetisk flukstetthet i den luftfylte spolen $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 I_0 \cdot \frac{N}{d}$.

Tverrsnittet av spolen har areal $A = \pi R^2$, så magnetisk fluks inni spolen blir

$$\Phi_B = B_0 A = \mu_0 I_0 \cdot \frac{N}{d} \cdot \pi R^2$$

Med $N$ viklinger blir sjølvinduktansen til spolen (se f.eks. uttrykk i formelark eller forklar)

$$L_0 = N \frac{\Phi_B}{I_0} = N \mu_0 \cdot \frac{N}{d} \cdot \pi R^2 = \underline{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{d} \cdot \pi R^2}.$$

(Oppgavformuleringen hadde vært bedre om du var bedt om uttrykke $L_0$ med $N, d, R$, samt fysiske konstanter.)

b) Den magnetiske feltstyrke $H(r)$ er uavhengig av materialet inne i solenoiden, for fra Amperes lov vil vi alltid finne (bevis kreves ikke)

$$\underline{H_0 = I_0 \cdot \frac{N}{d}} \qquad \text{for alle } r \in [0, R],$$

mens magnetisk flukstetthet er proporsjonal med permeabiliteten:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_{\mathrm{r}} \mu_0 H_0 & = \mu_{\mathrm{r}} \mu_o I_0 \frac{N}{d} \qquad \text{for alle } r \in [0, \frac{1}{2}R] \\ \mu_0 H_0 & = \mu_0 I_0 \frac{N}{d} \qquad \text{for alle } r \in [\frac{1}{2}R, R] \end{cases}$$

Vanskeligere er det altså ikke.

c) Magnetisk energiinnhold per volumenhet er $u = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H_0^2$, der permeabiliteten $\mu$ for det aktuelle området må brukes.

Da $H$ er homogen inne i solenoiden finner vi totalt magnetisk energiinnhold ved å summere over de to deler med jern og med luft, som har volum henholdsvis $V_{\text{jern}} = \pi(R/2)^2 d$ og $V_{\text{luft}} = (\pi R^2 - \pi(R/2)^2)d$. (Integrasjon over volumet skulle være unødvendig når $H$ er konstant.) Dette gir

$$\begin{aligned} U &= \int u\mathrm{d}V = u_1 V_{\text{jern}} + u_2 V_{\text{luft}} = \frac{1}{2}\mu_{\text{r}}\mu_0 H_0^2\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 d + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2\cdot\left(\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) d \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 d\,(\mu_{\text{r}} + (4-1)) = \underline{\frac{\pi R^2}{8} I_0^2\cdot\frac{N^2}{d}\,\mu_0(\mu_{\text{r}}+3)}\,. \end{aligned}$$

Da $\mu_{\text{r}} \gg 3$ vil 3-tallet nærmest være neglisjerbart, kun det ferromagnetiske materialet bidrar til energien.

d) Sammenhengen mellom energiinnhold og strøm definerer sjølvinduktansen $L$ (oppgitt på formelarket):

$$U = \frac{1}{2}LI_0^2 \qquad \Rightarrow \quad L = \frac{2U}{I_0^2} = \underline{\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{N^2}{d}\,\mu_0(\mu_{\text{r}}+3)}\,,$$

med tallverdier

$$L = \frac{\pi(0,020\,\text{m})^2}{4}\cdot\frac{100^2}{0,100\,\text{m}}\,4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{H/m}\cdot(2000+3) = 79,1\cdot 10^{-3}\,\text{H} = \underline{79,1\,\text{mH}}\,.$$

Som for $U$ ser vi at det er jernkjernen som bidrar til det vesentlige av sjølvinduktansen.

Alternativ "nødløsning" med oppgitt $U = 500$ mJ for strømstyrke $I_0 = 4{,}0$ A:

$$L = \frac{2U}{I_0^2} = \frac{2\cdot 500\,\text{mJ}}{16\,\text{A}^2} = 62,5\cdot 10^{-3}\,\text{VAs/A}^2 = \underline{62,5\,\text{mH}}. \qquad (\text{J} = \text{VAs} \quad \text{og H} = \text{Vs/A}).$$

e) Faradays lov (fra formelark): $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ eller $\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$

Når vi skal finne $E$-feltet i et punkt må vi bruke den distribuerte formen til høyre. Venstre formel forutsetter feltet setter opp en elektromotorisk spenning i en ledning. Med sylindersymmetri får vi indusert samme $E$ langs en sirkel konsentrisk om sylinderen med radius $r = \frac{3}{4}R$, der punktet P ligger på denne sirkelen slik at $\oint \mathrm{d}s = 2\pi r$. Merk at sirkelen ligger innenfor spolen og at den nå ikke har noe ferromagnetisk materiale.

Magnetisk fluks innenfor sirkelen er $\Phi_B = \mu_0 I(t)\cdot\frac{N}{d}\cdot\pi r^2$, som innsatt i Faradays lov til høyre over gir

$$E\cdot 2\pi r = -\mu_0\frac{N}{d}\cdot\pi r^2\cdot\frac{\partial I(t)}{\partial t} = -\mu_0\frac{N}{d}\cdot\pi r^2\cdot I_0\cdot\omega\cos\omega t\,.$$

Dette gir $E(t) = E_0\cdot\cos\omega t$ med amplitude $E_0$ ved $r = \frac{3}{4}R = 0{,}015$ m:

$$E_0 = -\mu_0\frac{N}{2d}\cdot r\cdot I_0\cdot\omega = -4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{H/m}\cdot\frac{100}{2\cdot 0,10\,\text{m}}\cdot 0,015\,\text{m}\cdot 4,0\,\text{A}\cdot 2\pi\cdot 1000\,\text{s}^{-1} = \underline{-0,24\,\text{V/m}}$$

(enheter: H = Vs/A gir svaret V/m ).

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 20. juni 06.

Karakterstatistikk:

| | A | B | C | D | E | F | Totalt | Middel | Middel *) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MTENERG | 14 | 10 | 12 | 17 | 22 | 12 | 87 | D | 2,4 |
| MTIØT | 8 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 14 | B | 4,2 |
| Sum | 22 | 14 | 12 | 18 | 23 | 12 | 101 | C | 2,6 |

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

Middelkarakter for de ulike oppgavene:

| 1: | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | C | E | C | D | C | C | F | B | B | E | E |
| 2: | a | b | c | | 3: | | 4: | a | b | c | d | e |
| | D | D | E | | D | | | A | C | D | C | D |