Institutt for fysikk 2007

TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
Kont.eksamen 7. aug. 2007. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Rett svar:	C	B	B	B	C	C	B	C	D

Detaljer om spørsmålene:

a) C. Ladningene på samme linja som P vil gi netto null E. De to andre gir like stort bidrag i retning henholdsvis opp til høyre og ned til høyre. Resultantfelt blir da horisontalt mot høyre, vist med $\vec{3}$.

b) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q. Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

c) B.

d) B. Elektrisk felt og magnetisk moment er vektorstørrelser.

e) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\dfrac{\partial (BA\cos\theta)}{\partial t} = BA\sin\theta \cdot \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = BA\sin\theta\cdot\omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

f) C. Feltfritt i metallet gir at 1 forkastes. Totalladning $-Q$ (negativ) gjør at ytterste feltlinjer må gå innover. Med én Q representert ved fire feltlinjer ser vi at C er rett.

g) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

h) C. Ladningene i ledningen påvirkes av en kraft $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Denne er null bare når $\vec{v}$ og $\vec{B}$ er parallell (forutsatt $\vec{v}$ eller $\vec{B}$ ikke er null).

i) D. Kraft proporsjonal med utsvinget x, altså $F = -kx$, gir fra Newton 2:
$ma = -kx \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + kx = 0$, som er en harmonisk svingelikning.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) ρ_{20} er bestemt av at total ladning (integrert over hele kulevolumet) skal være lik Q:

$$Q = \int_{r<R} \rho_2(r)\mathrm{d}V$$

Med kulesymmetrisk ladningstetthet kan vi velge kuleskall med radius r og tykkelse dr: $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$, slik at

$$Q = 4\pi\rho_{20}\int_0^R r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}r = 4\pi\rho_{20}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right]_0^R = \frac{\pi}{3}\rho_{20}R^3\,,$$

som gir det som skulle vises: $\underline{\rho_{20} = \dfrac{3Q}{\pi R^3}}$.

b) Kule 1: Inni metallkula er $E_1(r) = 0$ og ladningen Q fordeler seg jamt på kulas overflate. Vi velger en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ konsentrisk med metallkula. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være konstant i absoluttverdi på heile gaussflata, og dessuten radielt retta utover, dvs. parallelt med flatenormalen d$\vec{A}$. Gauss' lov for $\vec{E}$ gir da:

$$\oint E_1(r)\mathrm{d}A = E_1(r)\cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\quad (r>R)}\,,\qquad \text{og altså}\qquad \underline{E_1(r) = 0\quad (r<R)}$$

Kule 2: Feltet $E_2(r)$ inni kula bestemmes ved å velge kuleformet gaussflate med radius $r < R$. Da må vi bestemme nettoladningen innenfor denne gaussflata. Vi bruker samme metode som ved utregning av den totale ladningen Q (ovenfor), men vi integrerer bare ut til radius r:

$$q_2(r) = 4\pi\rho_{20}\int_0^r r^2\left(1-\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}r = 4\pi\rho_{20}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right]_0^r = 4\pi\rho_{20}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right) = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(4-3\frac{r}{R}\right)$$

Gauss' lov gir da

$$E_2(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_2(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(4-3\frac{r}{R}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\left(4-3\frac{r}{R}\right)}\,.$$

Feltet $E_2(r)$ utenfor kula bestemmes ved å velge kuleformet gaussflate med radius $r > R$. Da er netto ladning innenfor gaussflata lik Q, slik at feltet blir som rundt kule 1:

$$\underline{E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)}\,.$$

Kule 3: I det dielektriske materialet vil elektriske dipoler rettes inn langs feltet som skapes av den frie ladningen Q, dvs. kula poariseres med $\vec{P}_3$ retta utover. Inni kula kan vi da bruke Gauss' lov for den elektriske flukstettheten $\vec{D}$. Med uniform tetthet av fri ladning inne i kula, $\rho_3(r)$, blir netto fri ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r < R$ lik

$$q(r) = \rho_3(r)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3Q}{4\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\,\frac{r^3}{R^3}$$

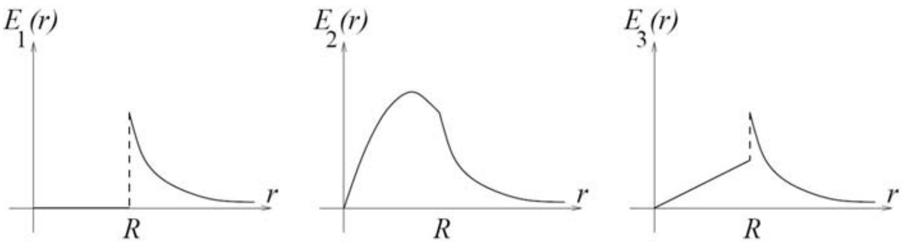
og Gauss' lov for E_3 gir (hvor vi bruker $\epsilon_\mathrm{r} = 2,00$):

$$E_3(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0}\cdot Q\,\frac{r^3}{R^3} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_3(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3} \quad (r < R)}\,.$$

På utsiden er E-feltet som for kule 1 og 2: $\underline{E_3(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)}\,.$

c)

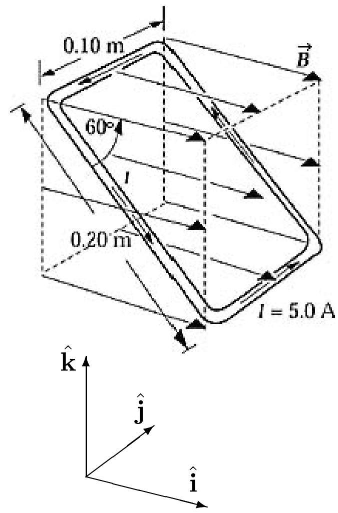
Skisse av feltstyrkene for de tre kulene:



d)

$$V(R) = -\int_\infty^R \vec{E}_2(r)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big]_\infty^R = \underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}}\,.$$

Oppgave 3. Magnetisme



a) $\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B}$, gir idet vinkelen mellom ℓ og $\vec{B}$ er 90°:

$$F = I\ell B\sin 90^\circ = 5,00\cdot 0,10\cdot 1,50\ \mathrm{AmT} = \underline{0,75\ \mathrm{N}}\,.$$

Ifølge høyrehåndsregelen er retningen rett opp, normal på $I\vec{\ell}$ og $\vec{B}$. Legger inn et koordinatsystem xyz som vist i figuren, da får $\vec{F}$ retning langs $\hat{\mathbf{k}}$.

b)

$$\Phi_B = \int_{\text{sløyfe}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = B\cos 30^\circ A$$
$$= 1,50\ \mathrm{T}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 0,020\ \mathrm{m}^2 = 26\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Tm}^2 = \underline{26\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}}\,.$$

Her er A er arealet sv strømsløyfa og 30° er vinkelen mellom B-feltet og flatenormalen.

c) $\vec{\mu} = I\vec{A}$ der $\vec{A}$ er flatenormalen. Retningen altså langs flatenormalen, dvs. i xz-plan og 60° med $\hat{\mathbf{k}}$, med verdi

$$\underline{\mu = 5,0\ \mathrm{A}\cdot 0,020\ \mathrm{m}^2 = 0,10\ \mathrm{Am}^2}\,.$$

d) Kraftmomentet beregnes enklest fra $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (oppgitt siste formelside med navn magnetisk dreiemoment):

$$|\vec{\tau}| = \tau = \mu B \sin 30^\circ = 0,10\,\mathrm{Am}^2 \cdot 1,5\,\mathrm{T} \cdot 0,5 = 0,075\,\mathrm{Am}^2 \cdot \mathrm{N/(Am)} = \underline{0,075\,\mathrm{Nm}}\,,$$

med retning $\hat{\mathbf{j}}$ ifølge høyrehåndsregelen. Evt. kan momentet beregnes fra arm x kraft for de to kortsidene:

$$\vec{\tau} = 2 \cdot \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2 \cdot 0,10\,\mathrm{m} \cdot 0,75\,\mathrm{N} \cdot \sin 30^\circ = 0,075\,\mathrm{Nm}\,.$$

Oppgave 4. Diverse oppgaver

a) E-feltet mellom kuleskallene er gitt ved $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r^2}$, ellers null. Potensiell energi per volumenhet er

$$u = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\,.$$

Mellomrommet har da total potensiell energi

$$U = \int_a^b u \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_a^b \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}}\,.$$

Alternativt kan energien beregnes fra potensialet mellom kuleskallene

$$V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

og energiuttrykket (i ferdig oppbygd ladning):

$$U = \sum_Q \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q(V_a - V_b) = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\,.$$

b) Bølgen $y(x,t)$ er en bølge som har utslag i y-retning og propagerer i $+x$-retning. Med symboler A = amplitude, k = bølgetall og ω = frekvens, kan vi skrive: $y(x,t) = 10\,\mathrm{m} \cdot \sin\big(4\pi\ \mathrm{m}^{-1}\ x - 200\pi\ \mathrm{s}^{-1}\ t\big) = A\sin(kx - \omega t)$

i) Amplitude $\underline{A = 10\,\mathrm{m}}$.

ii) $k = 4\pi\ \mathrm{m}^{-1}$ gir $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{4\pi\ \mathrm{m}^{-1}} = \underline{0,50\ \mathrm{m}}$

iii) $\omega = 200\pi\ \mathrm{s}^{-1}$ gir $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{200\pi\ \mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = \underline{100\,\mathrm{Hz}}$

iv) P.g.a. ulikt fortegn foran x og t-leddet, propagerer bølgen i $+x$-retning. Bølgefarten er gitt ved uttrykket $v = \lambda \cdot f = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{200\pi\ \mathrm{s}^{-1}}{4\pi\ \mathrm{m}^{-1}} = \underline{50\,\mathrm{m/s}}$.

c) i)

$$I = \frac{P}{A} = \frac{60\,\mathrm{W} \cdot 50\%}{4\pi(2,00\,\mathrm{m})^2} = \underline{0,60\,\mathrm{W/m}^2}\,.$$

ii) Her er det stort sett å bruke formler fra formelarket med kløkt: $I = \langle S \rangle$, der $\langle \ldots \rangle$ er tidsmiddel og S er Poyntingvektoren $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Med $\vec{E}(x,t)$ og $\vec{H}(x,t) = \vec{B}(x,t)/\mu_0$ fra formelark får vi

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}E_0\cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \times B_0\cos(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu_0}E_0 B_0\cos^2(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Videre er for e.m.bølge $E_0 = cB_0$, slik at

$$I = \langle S \rangle = \frac{c_0}{\mu_0}B_0^2 \cdot \langle\cos^2(kx - \omega t)\rangle = \frac{c_0}{\mu_0}B_0^2 \cdot \frac{1}{2}$$

og amplituden B_0 blir lik

$$B_0 = \sqrt{\frac{2I\mu_0}{c_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,60\,\mathrm{W/m}^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}} = 7,09 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{T} = \underline{71\,\mathrm{nT}}\,.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 9. aug. 07.