Institutt for fysikk 2008

TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
Eksamen 4. juni 2008 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	D	A	E	B	B	B	E	E	C	A	C

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) D. I horisontal retning (tiltrekning neg. ladn.) overskuddskraft mot venstre. I vertikal retning (frastøtning pos. ladn.) overskuddskraft oppover. Totalt opp til venstre.

b) A. E-feltet har retning inn mot negative ladninger. Alle punkter på ringen bidrar like mye slik at resultantfelt peker rett mot sentrum av ringen.

c) E. Tiltrekningskraft mellom pos og neg ladning slik at potensiell energi blir stadig mindre og går mot $-\infty$ når de er veldig nærme hverandre.

d) B. Ladningen er lik over alle kondensatorer: $Q = CV$, slik at spenning og kapasitans er omvendt proporsjonale.

e) B. $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$ vil ifølge høyrehåndsregelen ha retning mot venstre i forhold til $\vec{v}$.

f) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

g) E. En harmonisk oscillasjon krever at kraften som trekker tilbake mot likevektsstilling er prop. med utsvinget fra likevekt.

h) E. Kinetisk energi alltid positiv, derfor kan A, C og D forkastes. Hastigheten forandres harmonisk, derfor må $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ også endres harmonisk, 5 er rett.

i) C. Frekvensen f er alltid uendra mens hastigheten v endres og dermed bølgelengden $\lambda = v/f$ og bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$.

j) A. Ifølge Snells brytningslov brytes stråler mot innfallsloddet når lyset går fra medium med lav til større n og motsatt fra høy til lav n. Dette oppfylles kun for stråle 1.

k) C. E.m.b. er transversell bølge, som betyr at $\vec{E}$ (og $\vec{B}$) svinger i yz-planet. Hvilken retning i dette planet er likegyldig.

Oppgave 2. Elektrostatikk

a) Sylindersymmetri betyr at det er kun $\hat{\mathbf{r}}$-komponenter og ingen ϕ eller z-avhengighet: $\vec{D} = D_r\,\hat{\mathbf{r}}$ og $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. Bruk av Gauss: $\iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = D(r)\cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r \cdot h = Q$ gir

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{h\,2\pi r} & \text{for} \quad r \in [r_1, r_2] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

$$E = E_r(r) = \frac{D_r(r)}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{h\,2\pi\epsilon_0\,r} & \text{for} \quad r \in [r_1, r_2] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{2}$$

b) Spenningen uttrykt med E og videre Q:

$$V_0 = V_1 - V_2 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_1^2 \frac{Q/h}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}r = \frac{Q/h}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{3}$$

som gir

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 h V_0}{\ln r_2/r_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot 0,20\,\mathrm{m}\cdot 150\,\mathrm{V}}{\ln 5/3} = 3,266\,\mathrm{nC} = \underline{3,3\,\mathrm{nC}}\,.$$

Kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V_0}\left(= \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln r_2/r_1}\right) = \frac{3,266\,\mathrm{nC}}{150\,\mathrm{V}} = 21,8\,\mathrm{pF} = \underline{22\,\mathrm{pF}}\,.$$

Merknad: Det var i oppgaven krevd at Q skal beregnes først. Bruk av $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln r_2/r_1}$ fra formelsamling og derpå $Q = C_0 V_0$ godtas ikke som fullgodt svar.

c) Overflateladningstettheten er lik elektrisk flukstetthet $D = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 E$ ved overflata $r = r_1$. $D = \epsilon E$ så vi må beregne $E(r_1)$. Denne finner vi fra spenningen V over indre–ytre sylinder, som må være lik både i luft og væske, men spenningen forandres fra pkt. a/b siden spen.forsyningen frakoples. Derimot er ladningen uendra, som beregna for indre sylinder er (med v=væske og ℓ=luft)

$$\begin{aligned} Q &= Q_\mathrm{v} + Q_\ell = \sigma_\mathrm{v} \cdot A_\mathrm{v} + \sigma_\ell \cdot A_\ell = D_\mathrm{v} \cdot A_\mathrm{v} + D_\ell \cdot A_\ell \\ &= \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 E(r_1) \cdot 2\pi r_1 h_\mathrm{v} + \epsilon_0 E(r_1) \cdot 2\pi r_1 h_\ell = (\epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v} + h_\ell)\, \epsilon_0 E(r_1) \cdot 2\pi r_1 \end{aligned}$$

Dette gir for $E(r_1)$:

$$E(r_1) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r_1} \cdot \frac{1}{\epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v} + h_\ell} \quad \left(= \frac{3,266\,\mathrm{nC}}{2\pi\epsilon_0 \cdot 0,03\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{5 \cdot 0,12\,\mathrm{m} + 0,08\,\mathrm{m}} = 2879\,\mathrm{V/m} \right),$$

og overflateladningstettheten ved indre sylinder omgitt av væske blir

$$\begin{aligned} \sigma_\mathrm{v} = D_\mathrm{v}(r = r_1) = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0 E(r = r_1) &= \frac{Q\epsilon_\mathrm{r}}{2\pi r_1} \cdot \frac{1}{\epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v} + h_\ell} \\ &= \frac{3,266\,\mathrm{nC} \cdot 5}{2\pi \cdot 0,030\,\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{5 \cdot 0,12\,\mathrm{m} + 0,08\,\mathrm{m}} = 127,4\,\mathrm{nC/m^2} = \underline{127\,\mathrm{nC/m^2}}. \end{aligned}$$

ALTERNATIVT: Betrakte kondensatoren som parallellkopling av to sylinderkondensatorer:

$$C = C_\ell + C_\mathrm{v} = C_0 \cdot \frac{h_\ell}{h} + C_0 \cdot \epsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{h_\mathrm{v}}{h} = C_0 \cdot \frac{h_\ell + \epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}}{h} \left(= C_0 \cdot \frac{17}{5} = 74\,\mathrm{pF} \right).$$

Herfra finne det nye potensialet

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_0} \cdot \frac{h}{h_\ell + \epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}} = V_0 \cdot \frac{h}{h_\ell + \epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}} \; (= 44,1\,\mathrm{V})$$

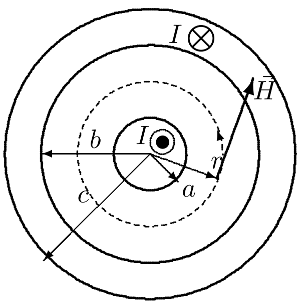
og ladningen for væskekondensatoren:

$$Q_\mathrm{v} = C_\mathrm{v} V = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}}{\ln r_2/r_1} \cdot V_0 \cdot \frac{h}{h_\ell + \epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}} \; (= 2,88\,\mathrm{nC})$$

der uttrykk for C er brukt fra b). Flateladningen blir

$$\sigma_\mathrm{v} = \frac{Q_\mathrm{v}}{A_\mathrm{v}} = \frac{Q_\mathrm{v}}{2\pi r_1 h_\mathrm{v}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}}{2\pi r_1 h_\mathrm{v} \cdot \ln r_2/r_1} \cdot V_0 \cdot \frac{h}{h_\ell + \epsilon_\mathrm{r} h_\mathrm{v}} = \frac{\epsilon_0 \cdot 5}{0,030\,\mathrm{m} \cdot \ln 5/3} \cdot 150\,\mathrm{V} \cdot \frac{20}{8 + 5 \cdot 12} = 127,4\,\mathrm{nC/m^2}.$$

Oppgave 3. Magnetfelt i koaksialkabel.



Vi bruker Ampères lov for magnetfeltstyrken H med integrasjonsveg lik sirkel med radius r konsentrisk med kabelen (se stiplet sirkel på figuren).

P.g.a. symmetri vil H være asimutalt retta: $\vec{H} = H\,\hat{\phi}$ og ha konstant verdi på integrasjonvegen. Retningen gitt av høyrehåndsregelen. Amperes lov gir

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = H \cdot 2\pi r \quad \overset{\text{(Amp)}}{=} \quad I_\mathrm{encl} = \iint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{4}$$

der I_encl er strømmen i arealet innenfor integrasjonsvegen.

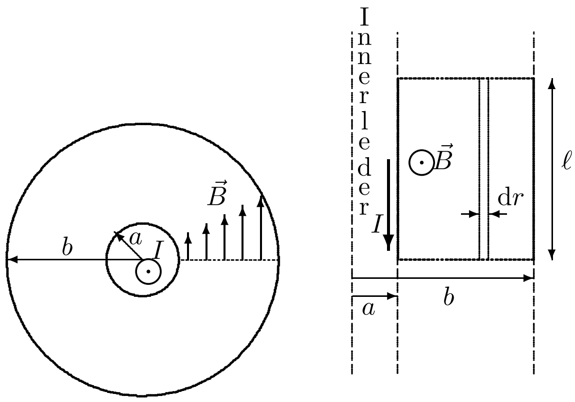
a) Med integrasjonsveg mellom inner- og ytterleder er $I_\mathrm{encl} = I$, slik at

$$H \cdot 2\pi r = I \quad \Rightarrow \quad \underline{H(r) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}, \qquad r \in [a, b]},$$

som skulle vises.

b) Magnetisk flukstetthet blir $B(r) = \mu_0 H(r) = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$ for $r \in [a, b]$, $\qquad B = 0$ ellers.

For å beregne asimutal magnetfluks i området mellom lederne ser vi på et kabelstykke av (valgt) lengde ℓ.



Figuren helt til venstre viser et tverrsnitt normalt på strømretningen. Arealet som er aktuelt for å beregne asimutal fluks blir et rektangel med sidekanter langs henholdsvis radius (kortstiplet linje) og i kabelretningen. Dette rektangelet med bredde $b - a$ og høyde ℓ er vist i høyre figur.

Rektangelet deles i tynne skiver med bredde dr og areal d$A = \ell$dr. Flatenormalen d$\vec{A}$ vil være parallell med $\vec{B}$, da kan den asimutale B-fluks mellom gjennom det gitte rektangelet uttrykkes

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_a^b B(r) \cdot \ell \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \underline{\frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}}\,.$$

c) Sjølvinduktansen L er gitt ved likningen (formelark, Faradays lov) $\dot{\Phi}_B = L \cdot \dot{I}$, der prikk er tidsderivert. I uttrykket for Φ_B i b) er kun strømmen I avhengig av tida slik at vi får

$$L = \frac{\dot{\Phi}_B}{\dot{I}} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\,, \quad \text{og per lengdeenhet:} \quad \underline{L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}\,.$$

Alternativt, energibetraktning: Med energitetthet $u = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2 r^2}$, blir energi per lengdeenhet:

$$U' = \frac{\int_a^b u \cdot \ell \cdot 2\pi r \mathrm{d}r}{\ell} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{4\pi^2} \int_a^b \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I^2}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Fra sammenhengen $U' = \frac{1}{2} L' I^2$ får vi da $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$.

d) Numerisk for den gitte kabelen:

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{2\pi} \ln \frac{3}{0,5} = 0,3584\,\mu\mathrm{H/m} \qquad \underline{L = L' \cdot 10\,\mathrm{m} = 3,6\,\mu\mathrm{H.}}$$

e) Med jamt fordelt strøm blir strømtettheten konstant innenfor hvert område og lik henholdsvis

$$J = \begin{cases} J_{0\mathrm{a}} = \frac{I}{\pi a^2} & r < a \\ 0 & r \in [a, b] \\ J_{\mathrm{bc}} = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c\,. \end{cases} \tag{5}$$

For alle er $\vec{J} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og d$A = 2\pi r$dr, slik at strømmen I_{encl} i tverrsnitt mellom radius r_1 og r_2 blir fra (4)

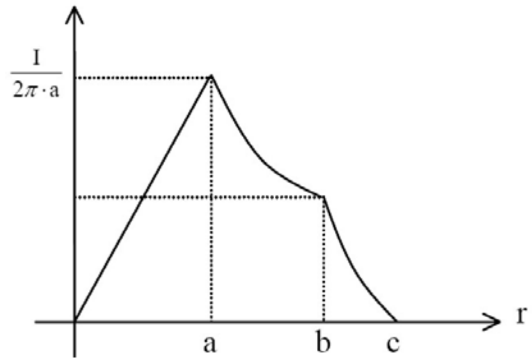
$$I_{\mathrm{encl}} = \iint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = J \cdot 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \mathrm{d}r = J\pi\, r^2\Big|_{r_1}^{r_2}\,, \tag{6}$$

Løsning av likning (4) for de ulike områdene gir

$$H \cdot 2\pi r = \left\{ \begin{array}{ll} J_{0\mathrm{a}}\pi(r^2 - 0^2) = I \cdot \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ I & r \in [a, b] \\ I + J_{\mathrm{bc}}\pi(r^2 - b^2) = I - I \cdot \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{array} \right\} \Rightarrow H(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2} & r < a \\ \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} & r \in [a, b] \\ \frac{I}{2\pi} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \frac{1}{r} & r \in [b, c] \\ 0 & r > c \end{cases}$$

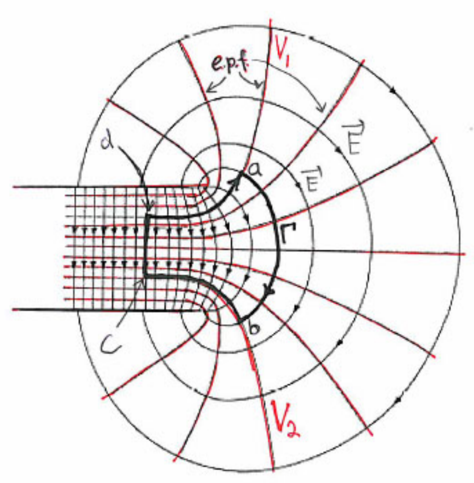
Godkjenner også svar der $J_{0\mathrm{a}}$ og J_{bc} inngår isf. I ifølge uttrykkene i likn. (5).

Til høyre vist skisse av $H(r)$. For alle $H(r)$ er retningen asimutal: $\vec{H}(r) = H(r)\hat{\phi}$.



Oppgave 4. Parallellplatekondensator

Når $E = 0$ utenfor kondensatorområdet og $\vec{E} \perp \mathrm{d}s$ langs horisontal del av rektangelet blir $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Ea \neq 0$.



En mer realistisk skisse av feltlinjer og ekvipotensialflater (e.p.f.) er vist i figuren. Begge bøyer nær og utenfor kanten, feltlinjer alltid $\perp$ e.p.f.

Ved f.eks. å legge inn en integrasjonsveg Γ som følger e.p.f. og feltlinjer, vil det være enkelt å vise at $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$, som det skal være i et elektrostatisk felt:

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint \mathrm{d}V &= -\int_a^b \mathrm{d}V - \int_b^c \mathrm{d}V - \int_c^d \mathrm{d}V - \int_d^a \mathrm{d}V \\
&= -(V_2 - V_1) - 0 - (V_1 - V_2) - 0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Oppgave 5. Hallprobe

a) Strømmen og ladningene går i positiv x-retning. Magnetfeltet går i negativ z-retning. Med vektornotasjon, der v_d og B er regnet positive, får vi

$$\vec{v}_\mathrm{d} = v_\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{i}} \quad \text{og} \quad \vec{B} = -B\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Dete gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_\mathrm{B} = q\vec{v}_\mathrm{d} \times \vec{B} = e \cdot v_\mathrm{d} \cdot B\,\hat{\mathbf{i}} \times (-\,\hat{\mathbf{k}}\,) = ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}} = ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E-felt retning nedover: $\vec{E} = -E\,\hat{\mathbf{j}}$ (vist i figur i oppgaven). Potensialforskjellen $V_\mathrm{H} = E \cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_\mathrm{E} = e \cdot \vec{E} = -eE\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_\mathrm{E} + \vec{F}_\mathrm{B} = -eE\,\hat{\mathbf{j}} + ev_\mathrm{d}B\,\hat{\mathbf{j}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E = v_\mathrm{d}B\,, \quad \text{og altså} \quad \underline{V_\mathrm{H} = E \cdot d = v_\mathrm{d}Bd} \quad \text{(med høyest potensial øverst).}$$

b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_d for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_\mathrm{d} \cdot t\,d \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{d} = \frac{I}{n\,q\,t\,d} \quad \left(= \frac{0,15\,\mathrm{A}}{5,0 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 625\,\mathrm{m/s} \right).$$

Fra uttrykk for V_H ser vi at magnetfeltet da er

$$B = \frac{V_\mathrm{H}}{v_\mathrm{d}d} = \frac{V_\mathrm{H}}{I} \cdot n\,q\,t = \frac{6,5\,\mathrm{V}}{0,15\,\mathrm{A}} \cdot 5 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{0,52\,\mathrm{T}}\,.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 13. juni 08.