



NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi  
Institutt for Fysikk

# Løysingsframlegg TFY 4305

## Ikkjelineær dynamikk Haust 2011

Faglærer: Professor Jens O. Andersen  
Institutt for Fysikk, NTNU  
Telefon: 73593131

Mandag 19. desember 2011  
kl. 09.00-13.00

Tillette hjelpemiddel:

Godkjend kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Lykke til.

### Oppgåve 1

Likningane er gjeve ved

$$\dot{x} = 1 - (b + 1)x + ax^2y, \quad (1)$$

$$\dot{y} = bx - ax^2y, \quad (2)$$

a) Fikspunkta er finn ein ved å løyse  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Summen av (1) og (2) gjev da  $1 - x = 0$  eller  $x = 1$ . Likning (2) impliserer  $b - ay = 0$  eller  $y = b/a$ . Fikspunktet er difor  $(1, b/a)$ . Stabiliteten finn ein ved å rekne ut

eigenverdiane til Jacobi-matrisa. Vi har

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - b + 2axy & ax^2 \\ b - 2axy & -ax^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

og dermed

$$J(1, b/a) = \begin{pmatrix} b - 1 & a \\ -b & -a \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Dette gjev

$$\tau = b - a - 1, \quad (5)$$

$$\Delta = a. \quad (6)$$

Fikspunktet er stabilt når realdelen til eigenverdiane er negativ. Dette gjev  $\tau = b - a - 1 < 0$  eller  $\underline{b < a + 1}$ . Fkspunktet er ustabil for  $\underline{b > a + 1}$ . I tillegg er fikspunktet eit lineært senter for  $\underline{b = a + 1}$ .

b)  $\dot{x} = 0$  gjev  $\underline{y = (b + 1)/ax - 1/ax^2}$ .  $\dot{y} = 0$  gjev linja  $\underline{x = 0}$  eller  $\underline{y = b/ax}$ . Desse kurvene er vist på figur 1. Kurva  $y = (b + 1)/ax - 1/ax^2$  kryssar

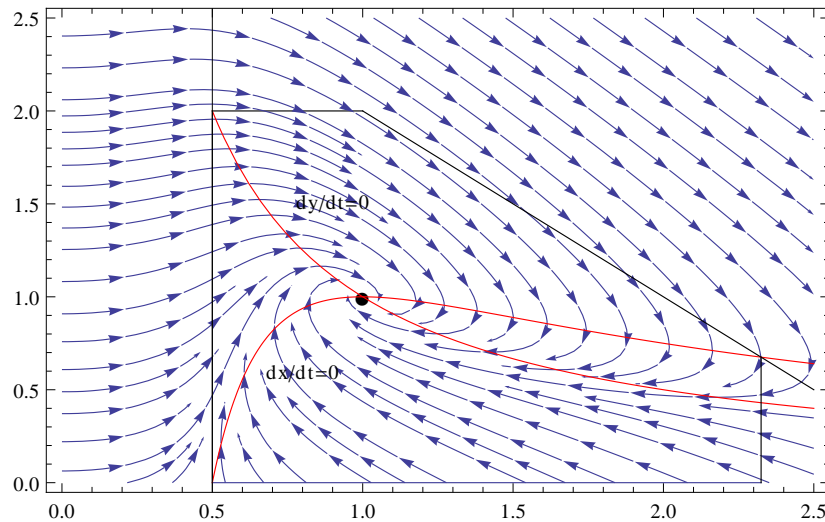


Figure 1: Isoklinar og innfangingsområde med  $a = b = 1$ .

$x$ -aksen i  $x = 1/(b + 1)$ . Det betyr at  $\dot{x} > 0$  på den delen av den vertikale linja  $x = 1/(b + 1)$  som er over  $x$ -aksen. Denne linja kryssar kurva  $y = b/ax$  i  $y = b(b + 1)/a$ . Vi har da at  $\dot{y} < 0$  på den delen av den rette linja  $y = b(b + 1)/a$  som ligg til høgre for  $x = 1/(b + 1)$ . Vidare har vi  $-\dot{y} - \dot{x} = x - 1 > 0$  for  $x > 1$ . Det vil seie at  $dy/dx < 1$  for  $x > 1$  og hastigheitsvektoren er brattare enn linja  $y = -x$ . Vi kan da bruke linja  $y = -x + b(b + 1)/a + 1$  som ein del av

innfangingsområdet. Denne linja kryssar igjen kurva  $y = (b + 1)/ax - 1/ax^2$  i punktet  $(x^*, y^*)$  (som det ikkje finst noko enkelt uttrykk for som funksjon av  $a$  og  $b$ ). Vi veit da at  $\dot{x} < 0$  på den vertikale linja frå  $(x^*, y^*)$  til  $(x^*, 0)$ . Tilslutt ser vi frå (2) at  $\dot{y} > 0$  langs  $x$ -aksen for  $x > 0$ . Dette er skissert på figur 1.

c) Realdelen til eigenverdiane skiftar forteikn når  $b - a - 1 = 0$ . Dette gjev  $b_c(a) = a + 1$ .

d) Innfangingsområdet som vi fann i b) inneheld eit fikspunkt. For å bruke Poincare-Bendixon teoremet kan vi ikkje ha eit fikspunkt i innfangingsområdet. Viss fikspunktet er ustabil kan vi fjerne ein liten omegn rundt fikspunktet frå innfangingsområdet og bruke Poincare-Bendixon teoremet. Det vil seie at grensesyklusen eksisterer berre for  $b > b_c$ . Sidan den stabile syklusen berre eksisterer når fikspunktet har blitt ustabil, er bifurkasjonen superkritisk.

e) Frekvensen er gjeve ved  $\omega \approx \text{im}\lambda = \sqrt{a}$ . Altså er perioden  $T \approx 2\pi/\sqrt{a}$ .

## Oppgåve 2

Avbildninga er gjeve ved

$$x_{n+1} = \frac{rx_n^3}{1 + x_n^4}, \quad (7)$$

der  $r > 0$  er ein parameter.

a) Fikspunkta er gjeve ved

$$x = \frac{rx^3}{1 + x^4}. \quad (8)$$

$x = 0$  er opplagt eit fikspunkt. Dei andre fikspunkta er gjeve ved

$$x^4 - rx^2 + 1 = 0. \quad (9)$$

Løysingane er

$$x_{1,2\pm} = \pm \left[ \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

der 1 er for øvre forteikn inni hakeparentesen og 2 er for nedre. Fikspunkta eksisterer berre for  $r \geq 2$ .

b) Stabiliteten er gjeve ved den deriverte til funksjonen  $f(x) = rx^3/(1+x^4)$ .

$$f'(x) = \frac{rx^2(3-x^4)}{(1+x^4)^2}. \quad (11)$$

Dette gjev  $f'(0) = 0$  og origo er såleis superstabil. For dei andre fikspunkta får ein bruke (9)

$$f'(x) = 1 + 2\frac{1-x^2}{1+x^4}. \quad (12)$$

La oss studere  $x_{1\pm}^2$  først. Ved innsetting av  $x_{1\pm}^2$  i (12) finn ein etter litt opprydding

$$f'(x_{1,\pm}) = 1 - \frac{2\sqrt{r^2-4}}{r}. \quad (13)$$

Vi ser da at  $f'(x_{1,\pm}) < 1$ . Kan vi ha  $f'(x_{1,\pm}) < -1$ ? Da har vi i tilfelle  $1 - 2\sqrt{r^2-4}/r < -1$  eller  $1 < \sqrt{r^2-4}/r$  som aldri er oppfylt. Altså er  $x_{1,\pm}$  alltid stabile fikspunkt. Tilsvarende får ein ved innsetting av  $x_{2\pm}^2$  i (12) etter litt opprydding

$$f'(x_{2,\pm}) = 1 + \frac{2\sqrt{r^2-4}}{r}, \quad (14)$$

som viser at  $f'(x_{2\pm}) > 1$  og difor er desse fikspunkta alltid ustabile. Vi har altså at  $f'(x_{1,2\pm}) > -1$  for alle  $r \geq 2$ . Det tyder at vi ikkje kan ha periodedobling via ein flipbifurkasjon sidan ein må  $f'(x) = -1$  i fikspunktet. Det er altså ingen periode-2 syklus.

### Oppgave 3

a) På figur 2 kan du sjå dei første stega i konstruksjonen av Sierpinski-trekanten. I kvart steg fjernar vi ein fjerdedel av arealet til figuren. Altså er



Figure 2: Sierpinski-trekanten.

$A_{n+1} = 3A_n/4$  og  $A_n = (3/4)^n A_0$  der  $A_0$  er arealet til trekanten til venstre. Dette gjev

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \\ &= \underline{\underline{0}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Arealet er såleis lik null. Dersom vi skalerer alle lengder med ein faktor ein halv, treng vi 3 trekantar for å dekkje figuren i neste steg. Difor er dimensjonen

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} (= 1.585\dots) \quad (16)$$

b) b) La  $f(x)$  vere ein glatt funksjon og sjå på sekvensen  $x_{n+1} = f(x_n)$  for  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Vi har

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (17)$$

For ei periodisk bane med periode  $p$  har vi

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)|. \end{aligned} \quad (18)$$

Bruk av kjerneregelen gjev

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{p} \ln |[f^p]'(x_0)| \quad (19)$$

Dersom ei bane er superstabil har vi  $[f^p]'(x_0) = 0$ . Det impliserer  $\ln|[f^p]'(x_0)| = 0 = -\infty$  og difor er  $\lambda = -\infty$ .

c) Det finst tre typar bifurkasjonar: sadel-bifurkasjonar, transkritiske bifurkasjonar og høygaffel-bifurkasjonar.

Sadel-bifurkasjonar: Prototypen er

$$\dot{x} = r + x^2. \quad (20)$$

Prototypen er

$$\dot{x} = r + x^2. \quad (21)$$

Det finst ingen fikspunkt for  $r > 0$ , eit fikspunkt for  $r = 0$  og to symmetriske fikspunkt for  $r < 0$ .

Transkritiske bifurkasjonar: Prototypen er

$$\dot{x} = rx - x^2. \quad (22)$$

Origo er fikspunkt for alle verdier av  $r$ , men stabiliteten skiftar for  $r = 0$  (stabil for  $r < 0$  og ustabil for  $r > 0$ ). Origo byttar stabilitet med det andre fikspunktet  $x = r$ .

Høygaffel-bifurkasjonar: Prototypen er

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (23)$$

For  $r < 0$ , origo er stabilt og det einaste fikspunktet. For  $r = 0$  får vi to symmetriske fikspunkt. Origo er nå ustabil medan dei to (nyfødde) fikspunkta er stabile. Viss likninga er  $\dot{x} = rx + x^3$  er origo det einaste fikspunktet og ustabil. Etter dei andre fikspunkta blir fødde, blir origo stabilt medan dei nye er ustabile.