



NTNU

Fakultet for Naturvitskap og Teknologi  
Institutt for Fysikk

# Løysingsframlegg TFY4305 Ikkjelineær dynamikk Haust 2012

Faglærer: Professor Jens O. Andersen  
Institutt for Fysikk, NTNU  
Telefon: 73593131

Fredag 7. desember 2012  
kl. 09.00-13.00

Tillette hjelpemiddel:  
Godkjend kalkulator  
Rottmann: Matematisk Formelsamling  
Rottmann: Matematische Formelsammlung  
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Les oppgåvene nøye. Spør dersom noko er uklart. Lykke til.

## Oppgåve 1

Likninga for ein anharmonisk oscillator med demping kan skrivast som

$$\ddot{x} + b\dot{x} - kx + x^3 = 0, \quad (1)$$

der  $b$  og  $k$  er reelle parametre.

a) Dersom  $b > 0$  har vi vanleg demping, der leddet  $b\dot{x}$  kan tolkast som eit friksjonsledd. Dersom  $b < 0$ , har vi ”antidemping”, det vil seie at vi tilfører systemet energi. Det lineære leddet  $kx$  kan tolkast som ei kraft der forteiknet

avgjer retninga. Dersom  $k < 0$  har vi eit vanleg harmonisk ledd som verkar mot  $x = 0$ . Dersom  $k > 0$  verkar den lineære krafta bort frå origo. **Merk:** Den kubiske leddet dominerer for store  $|x|$  og stabiliserer oscillatoren. Vi multipliserer likning (1) med  $\dot{x}$  og skriv likninga

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{4} x^4 \right] = -b \dot{x}^2. \quad (2)$$

For  $b = 0$  og alle verdier av  $k$  er venstresida lik null og integrasjon gjev da den bevarte energien er

$$E = \underline{\underline{\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{4} x^4}}. \quad (3)$$

I dette tilfellet er den kinetiske energien  $\frac{1}{2} \dot{x}^2$  og potensialet

$$V(x) = -\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{4} x^4. \quad (4)$$

Vi ser og frå likning (2) at  $\frac{dE}{dt} < 0$  viss  $b > 0$  (dissipasjon) og  $\frac{dE}{dt} > 0$  viss  $b < 0$  (energi tilført systemet) i samsvar med tolkninga av  $b$  som friksjonsledd og “antidempingsledd”. Potensialet  $V(x)$  er vist i Fig. 1.

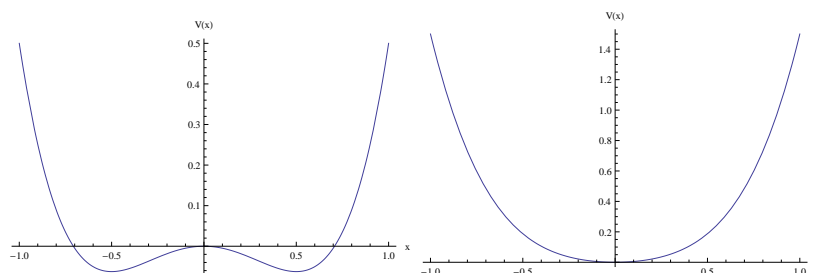


Figure 1: Potensialet  $V(x)$  for  $k = 1$  og  $k = -1$ .

b) Viss vi definerer ein ny variabel  $y = \dot{x}$ , følger likning (3) ved derivasjon og innseting frå likning (1).

c)  $\dot{x} = 0$  gjev  $y = 0$ . Innsett i likninga  $\dot{y} = 0$  gjev då  $kx - x^3 = 0$ . Vi har tre løysingar  $x = 0$  og  $x = \pm\sqrt{k}$ . Dette gjev fikspunkta  $(0, 0)$  og  $(\pm\sqrt{k}, 0)$ . Dei to fikspunkta  $(\pm\sqrt{k}, 0)$  eksisterer berre for  $k \geq 0$ . Jakobimatriza er

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k - 3x^2 & -b \end{pmatrix}. \quad (5)$$

For fikspunktet  $(0, 0)$ , gjev dette

$$A(0, 0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -b \end{pmatrix}}}. \quad (6)$$

For fikspunkta  $(\pm\sqrt{k}, 0)$

$$A(\pm\sqrt{k}, 0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2k & -b \end{pmatrix}}}. \quad (7)$$

d) Det karakteristiske polynomiet for fikspunktet  $(0, 0)$  er  $\lambda(\lambda + b) - k$  og eigenverdiane er

$$\lambda_{\pm} = \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4k}}{2}}}. \quad (8)$$

Det karakteristiske polynomiet for fikspunkta  $(\pm\sqrt{k}, 0)$  er  $\lambda(\lambda + b) + 2k$  og eigenverdiane er

$$\lambda_{\pm} = \underline{\underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8k}}{2}}}. \quad (9)$$

e) For fikspunktet  $(0, 0)$  har vi  $\tau = -b$  og  $\Delta = -k$ . For  $k > 0$  og vilkårlig  $b$  er altså eit sadelpunkt. For  $k < 0$  er origo ein node viss  $b^2 + 4k > 0$  og ein spiral viss  $b^2 + 4k < 0$ . For  $b^2 + 4k = 0$  har vi ein degeneret node. Origo er stabilt viss  $b > 0$  og ustabil viss  $b < 0$ . Dette er vist i Fig. 2.

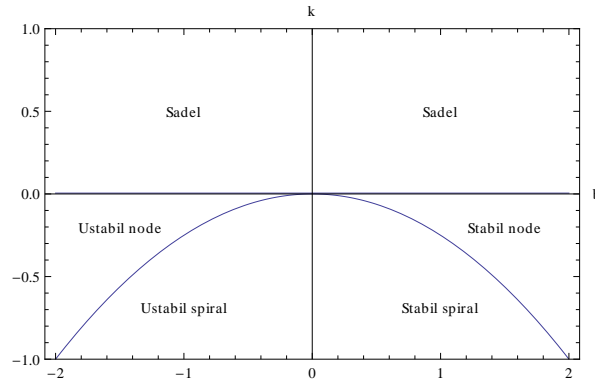


Figure 2: Stabilitetsdiagram for origo.

For fikspunkta  $(\pm\sqrt{k}, 0)$  har vi  $\tau = -b$  og  $\Delta = 2k$ . Dei eksisterer berre for  $k \geq 0$ . For  $k > 0$  er desse fikspunkta nodar viss  $b^2 - 8k > 0$  og spiralar viss  $b^2 - 8k < 0$ . For  $b^2 - 8k = 0$  har vi ein degeneret node. Fikspunkta er stabile viss  $b > 0$  og ustabile for  $b < 0$ . Dette er vist i Figur. 3.

f) For  $b = 0$ , er eigenverdiane til fikspunktet i origo lik  $\pm\sqrt{k}$ . For  $k \leq 0$  er origo difor eit nøytralt senter og for  $k > 0$  eit sadelpunkt. Altså skiftar origo stabilitet for  $k = k_c = 0$ . For  $b = 0$  er eigenverdiane til fikspunkta  $(\pm\sqrt{k}, 0)$  lik  $\pm i\sqrt{2k}$  og difor eit nøytralt senter. **Merk:** Sidan systemet er

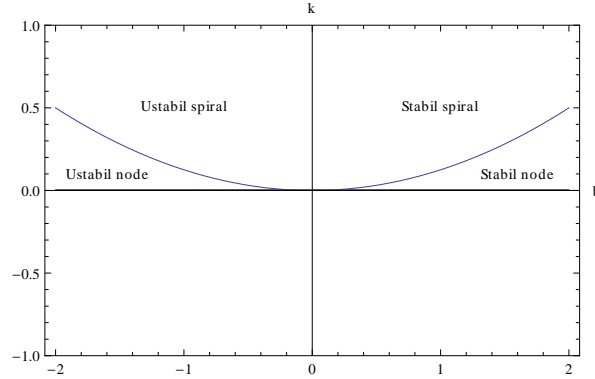


Figure 3: Stabilitetsdiagram for  $(\pm\sqrt{k}, 0)$ .

konservativt er eit lineært senter og eit ikkjelineært senter. Alternativt kan ein bruke at systemet er reversibelt for  $b = 0$ . Dette kan ein og kome fram til viss ein diskuterer potensialet  $V(x)$  som er vist i Fig. 1.

g) For  $k = 0$  gjev likningssettet (2)–(3) at origo er det einaste fikspunktet. Dersom  $b > 0$  har eit partikkel som beveger seg i eit potensial  $V(x) = \frac{1}{4}x^4$  med (anti)demping. Potensialet har same form som  $k = -1$  i Fig. 1. Dette tyder at fikspunktet er ein *stabil spiral*: Ein partikkel beveger seg att og fram i potensialet men utslaget blir mindre og mindre pga demping. For  $b < 0$  har vi antidemping - det vil seie at vi tilfører systemet energi og origo er ein *ustabil spiral*. For  $b = b_c = 0$  er systemet konservativt og origo skifter stabilitet. For  $b = 0$  er origo eit *nøytralt senter* (utslaget i potensialet er konstant). Sidan det er ikkje er stabile baner for  $b < 0$  eller  $b > 0$ , er bifurkasjonen *degenerert*. **Merk:** Linearising av likningssystemet impliserer at det er ei linje av fikspunkt ( $x$ -aksen) og eigenverdiane  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 = 0$ , og difor  $\Delta = 0$ . Dette er eit grensetilfelle der ein ikkje alltid kan stole på linearisering. Oppgåva her eit døme på det.

## Oppgåve 2

Likningssystemet er

$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad (10)$$

$$\dot{y} = x + y - y^3. \quad (11)$$

a)  $(0, 0)$  er opplagt eit fikspunkt. Spørsmålet er om det finst fleire fikspunkt.  $\dot{x} = 0$  gjev  $y = x - x^3$  som innsett i  $\dot{y} = 0$  gjev  $x + (x - x^3) - (x - x^3)^3 = 0$ . Dette kan vi faktorisere,  $x(x^8 - 3x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 2) = 0$ . Frå oppgåveteksten veit

vi polynomet i parantesen ikkje har reelle nulpunkt. Altså har likningssystemet ikkje andre løysingar enn  $x = y = 0$  og *origo er det einaste fikspunktet*.

b) Vi skiftar til polarkoordinatar og bruker

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}. \quad (12)$$

Dette gjev

$$\dot{r} = r - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta), \quad (13)$$

$$(14)$$

Dette gjev  $\dot{r} > r - r^3$  sidan maksimum til  $(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$  er 1. Likeeins er  $\dot{r} < r - \frac{1}{2}r^3$  sidan minimum til  $(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = \frac{1}{2}$ . Vi har da at  $\dot{r} > 0$  på ein sirkel med radius  $r > r_{\min} = 1$  og  $\dot{r} < 0$  på ein sirkel med radius  $r > r_{\max} = \sqrt{2}$ . Området mellom dei to konsentriske sirklane er difor eit innfangingsområde utan fikspunkt. Poincare-Bendixon teoremet gjev da at det finst ei stabil grensesyklus innafor dette området. Sja Fig. 4. Alternativt

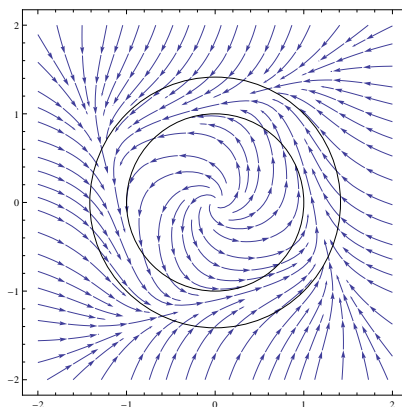


Figure 4: Faseportrett med innfangingsområde

og meir elegant kan ein vise at origo er ein ustabil spiral. Jakobimatrisa i origo er nemleg gjeve ved

$$A(0,0) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}. \quad (15)$$

og eigenverdiane er  $\lambda_{\pm} = 1 \pm i$ . Ein kan da fjerne eit infinitesimalt området rundt fikspunktet  $r = 0$  og bruk Poincare-Bendixon teoremet. Det var fleire studentar som løyste oppgava slik.

### Oppgave 3

a)  $x = 0$  er opplagt eit fikspunkt. Stabiliteten er gjeve ved  $|t'(x)|$  evaluert i  $x = 0$ . Sidan  $t'(x) = r$  for alle  $r$ , er  $x = 0$  stabilt for  $r < 1$ . For  $r = 1$  er  $x = 0$  marginalt stabilt. Alle punkt  $x \leq \frac{1}{2}$  er nå fikspunkt og  $x = 0$  er difor Liapunov stabil. Ved å bruke eit spindelnev ("cobweb") kan ein vise at  $x_n \rightarrow 0$  for alle  $x \in [0, 1]$  for  $r < 1$ . Altså er  $x = 0$  globalt stabilt for  $r < 1$ .

b) Ved innsetting ser ein at  $q = t(p)$   $p = t(q)$  dersom  $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$  og  $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ . Ulikheiten  $q \geq \frac{1}{2}$  gjev då  $r^2 \geq 1$  eller  $r \geq 1$ . For  $r = 1$  er  $p = q$  slik at periode-2 syklusen blir fødd for  $r = 1$  og eksisterer altså for  $r \geq 1$ .

c) Stabiliteten til periode-2 syklusen er gjeve ved  $|\frac{d}{dx}t(t(x))|_{x=p} = |t'(p)t'(q)|$ . Sidan  $t'(x) = r$  for alle  $x$ , er  $|t'(p)t'(q)| = r^2 > 1$  og syklusen er såleis *ustabil*. Vi har at  $t'(x) = r$  for alle  $x$ . Det tyder at Liapunov eksponenten er enkel å rekne ut:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \ln r .\end{aligned}\tag{16}$$

Vi har kaos når  $\lambda > 0$ , det vil seie for  $r > 1$ .