Laboratorieøvelse 2 i FY1003-Elektrisitet og magnetisme Vår 2010

Fysisk Institutt, NTNU

Enkle kretser med kapasitans og spole- bruk av datalogging.

Oppgave 1 -Spenning i RC krets

***a**: Mål inngangsspenningen og spenningsfallet over motstanden i en RC krets ved bruk av firkantpulserBestem tidskonstanten til kretsen ved kurvetilpasning og sammenlikne denne med teoretisk forventet verdi. Finn spenningen over kondensatoren ved bruk av Calculator i loggeprogrammet.*

***b**: Bruk vekselspenning som inngangssignal på samme RC krets som over og mål spenningsfallet over motstanden. Finn spenningsfallet over kapasitansen. Mål ut amplituder til signalene og sammenlikn resultatene med teoretisk forventet verdier. Bruk forskjellige frekvenser på vekselspenningen.*

Oppgave 2 - Strøm i RC og RL krets

***a**: Mål strømmen i en RC krets (med mindre R og større C) når inngangssignalet er firkantpulser. Undersøk om strømmen er i overensstemmelse med teoretisk forventet verdi og finn tidskonstanten ved kurvetilpasning.*

***b**: Mål strømmen i en RL krets og bestem tidskonstanten ved kurvetilpasning. Sammenlikne resultatet med teoretisk forventet verdi.*

Innledning

Hensikten med oppgaven er bli kjent med egenskapene til en elektrisk spole, kondensator og motstand og deres funksjoner i elektriske kretser. Dette skjer ved å bygge enkle kretser hvor disse komponentene inngår og deretter måle tidsforløp av strømmer og spenninger i slike kretser. Ved sammenlikning av målte tidsforløp for spenninger over komponentene og strømmer i kretsene med forventede kurveforløp, kan størrelsen av komponentene bestemmes.

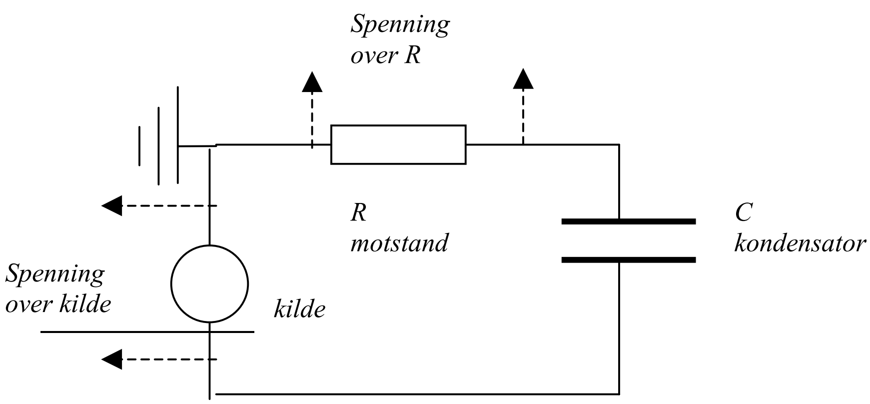
En motstand (R) begrenser **strøm** (I), når det legger et elektrisk spenningsfall (V) over den. Dette uttrykkes i Ohms lov: $V = R \cdot I$. En spole (med selvinduktans L) motsetter seg **endringer** i strømmen gjennom den, som uttrykkes i loven: $V = L \cdot \frac{dI}{dt}$, der V er spenningen over spolen og ${dI}/{dt}$ strømendring pr. tidsenhet. En kapasitans vil **summere** (integrere) ladning (Q) og det tilsvarende spenningsfallet blir: $V = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{\int I \cdot dt}{C}$; der C er kapasitansen.

Praktiske kommentarer, oppgave 1a

Sett opp kretsen med spenningsensorer som vist under. Bruk følgende verdier på komponentene ; C = 1 μF og R = 20kΩ, og regn ut forventet tidskonstanten, som er;

$$\tau = RC = 20 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} s = 20ms$$

Den ene sensoren måler spenningen over motstanden og den andre over begge komponentene i kretsen, som også er spenningen over polene til kilden. Husk å bruke felles jord, siden spenningssensorene er jordet.



Krets med tilkobling av sensorer

<u>Oppsett av datastudio</u>

a) Kople til de to spenningsensorene.
b) Dobbeltklikk på sensorene og sett målefrekvensen (loggefrekvens) til 500 Hz. Bruk en frekvens på signalgeneratoren på omtrent 3 Hz, eller en periode tid som er 4-5 ganger så stor som tidskonstanten (for å få med hele oppladning/utladningen).
c) Velg  og sett automatisk stopp til 1 sek.
d) Velg en graf for hver av spenningssensorene.

<u>Gjennomføring</u>

a) Trykk **start** når utstyret er koplet opp.
b) La programmet arbeide ferdig slik at alle dataene kommer frem på skjermen.

Merk av ett passelig område på V_R grafen og bruk ”*natural exponential fit*”. Les ut tidskonstanten.

Tilpasningsprogrammet vil tilpasse funksjonen; $y = a \cdot \exp(-k \cdot t) + b$ til den målte kurven. Som resultat av tilpasningen vil programmet beregne parametrene; ***a***, ***k*** og ***b*** (tilpasningsparametrene), som er slik at det er best mulig overensstemmelse mellom målinger og denne funksjonen. For oss er det ***k*** som er interessant, og denne er inversverdien av tidskonstanten;

$$k = \frac{1}{\tau}\text{, eller; } \tau = \frac{1}{k}.$$

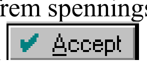
Om du finner en *k* verdi på f.eks 58 s^{-1}, betyr det at; $\tau = \frac{1}{58}s = \frac{1000ms}{58} = 17.2ms$.

Et eventuelt avvik mellom målt og teoretisk verdi kan skyldes forskjellige ting. Først og fremst er de verdiene som du bruker i det teoretiske uttrykket nominelle verdier (oppgitt fra fabrikanten). Også tilpasningsalgoritmen kan medføre usikkerheter. Mål verdien til motstanden med AVO meteret.

Finn spenningen over kondensatoren

Vi kan finne denne spenningen ved subtraksjon (sløyferegelen): $V_C = V - V_R$. Til dette bruker vi kalkulator.

a) Velg kalkulator.
b) Skriv inn; $V_C = V\text{-}V_R$
c) Trykk 

d) Definer V:
   Velg "Please define variable V.
   Finn frem spenningsdata for kilden.
e) Definer V_R:
   Velg "Please define variable V_R.
   Finn frem spenningsdataene for motstanden.
f) Trykk 

Du har nå en dataserie i datavinduet for V_C.

Praktiske kommentarer, oppgave 1b

Bruk vekselspenning og mål spenningene som funksjon av tid. Finn spenningen over kapasitansen som differensen mellom de to loggede signalene, $V_C = V_0 - V_R$. Les av maksimalverdiene til V_R og V_C, som under punkt 1a, og sammenlikne forholdet mellom dem med teoretiske verdier. Forholdet mellom maksimalverdiene over motstanden og kondensatoren skal være:

$$\frac{V_0^R}{V_0^C} = \frac{R}{\frac{1}{C \cdot \omega}} = RC \cdot 2\pi f \quad \text{(kapasitans)}$$

Les av frekvensen, regn ut dette forholdet, og se om det stemmer med målte verdier.

Tabell

Frek, f, Hz	V_0	V_R	$V_C=V_0-V_R$	V_R/V_C (målt)	$RC2\pi f$ (teor)
3					
7					
15					

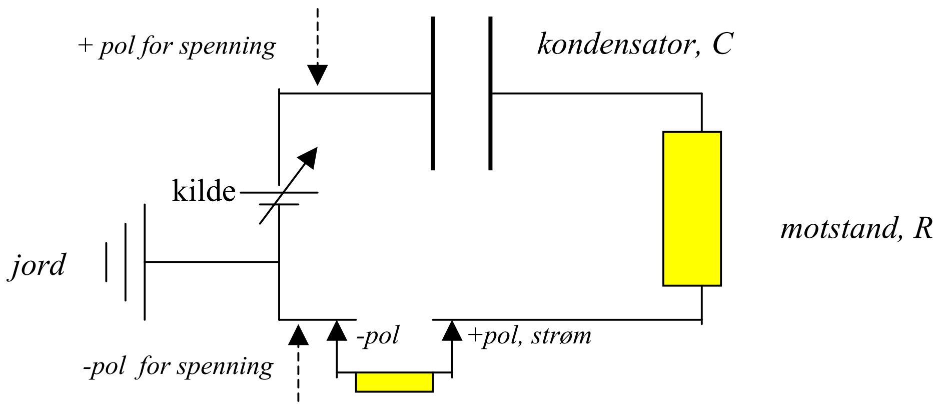
Praktiske kommentarer- oppgave 2a*; måling av strøm og spenning i kretsen.*

Bruk mindre R i RC kretsen, f. eks R =100 Ω, og større kapasitans, for eksempel 4.7 μF.

Tidsforløpet av strømmen skal være: $I = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$. Forventet tidskonstant og maksimalstrøm (I_0) for denne kretsen blir da;

$$\tau = RC = 100 \cdot 4.7 \cdot 10^{-6} = 0.47ms \quad \text{og} \quad I_0 = \frac{10V}{100\Omega} = 100mA$$

Lag følgende krets og bruk Pasco sensorer for måling av strøm og spenning.



RC krets med sensorer for strøm og spenning

Forslag til parameterbruk i Pasco: frekvens; f = 200Hz; loggefrekvens; 10000 Hz, Automatic Stop; 0,01 sec. Bruk maksimal amplitude på firkantspenningen.
Finn tidskonstanten ved bruk av tilpasningsfunksjonen og kontrollere at dette stemmer med forventet verdi. Forventet tidskonstant kan finnes ved bruk av Excel.

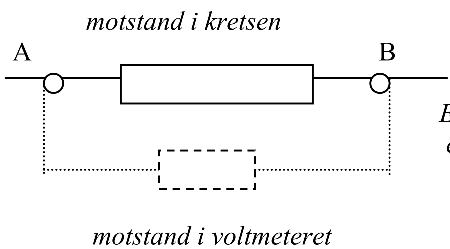
Praktiske kommentarer, oppgave 2b

Lag en kobling som tilsvarende i figuren over bortsett fra at kapasitansen byttes ut mot en spole. Bruk $f = 100\ Hz$ på firkantsignalet. Ha automatisk stopp etter 0.02 s. Bruk en loggefrekvens på 10000 Hz. Bruk en motstand med ca 6 Ω.

- Finn tidskonstanten med bruk av kurvetilpasning (merk av ønsket område, og bruk
- *tilpass eksponensiell*).
- Sammenlikn resultatet med forventet verdi (se over). Du finner samlet R ved måling. Husk at en spole i praksis både er en motstand og spole, slik at du også må måle motstanden til spolen (R_s). Sett du finner følgende k parameter fra tilpasningen: $3000s^{-1} = k = \frac{R}{L}$, som gir; $L = \frac{R}{k} = \frac{R_m + R_s}{k} = \frac{(6+2.5)\Omega}{3000s^{-1}} = 2.76 \cdot 10^{-3}\,Henry = 2.76mHenry$
- I tillegg kan du estimere L ut fra uttrykket for selvinduktans (Bruk Excel); $L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$,

der μ_0 er magnetisk permeabilitet; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, Hm^{-1}$, N er antall viklinger (400), A er tverrsnittsarealet (bruk 3cm x 3cm) og l er spolens lengde (estimer: l = 4 cm). Diskuter avviket.

Litt om instrumentene: Med en ***voltmeter*** måles spenningen mellom to punkter i kretsen, og dermed kobles dette inn i ***parallell*** med målepunktene. For ikke å forstyrre kretsen må derfor voltmeteret ha en høy indre motstand.

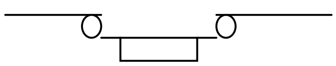


*Ett **voltmeter** kobles i parallell. Mellom punktene A og B er spenningsfallene like, uansett hvilken grein en følger.*

Strømmen som flyter inn mot målepunktet A vil forgreine seg gjennom motstanden i kretsen og motstanden i voltmeteret, og for at mesteparten av strømmen skal gå kretsmotstanden, må ***voltmeter motstanden være mye større*** enn motstanden i kretsen.

Med et ***amperemeter*** måles strømmen som flyter i en ledning, og dermed settes dette inn i kretsen, i ***serie***;

*Et **amperemeter** settes inn i kretsen, i serie*

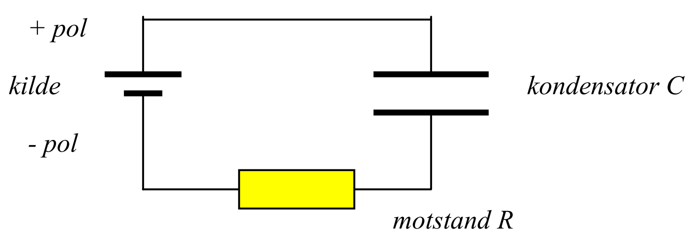


Når det flyter en strøm (I) i ledningen, vil det utvikles en spenning; $V = R \cdot I$, som er proporsjonal med strømmen I, når det settes inn en motstand R. For å forstyrre kretsen minst mulig, må ***R være liten***. Det er altså V som måles, og når R er kjent, kan I beregnes. Det vil utvikles en spenning over amperemetermotstanden, som en forstyrrelse av kretsen.

Teori for RC kretser;

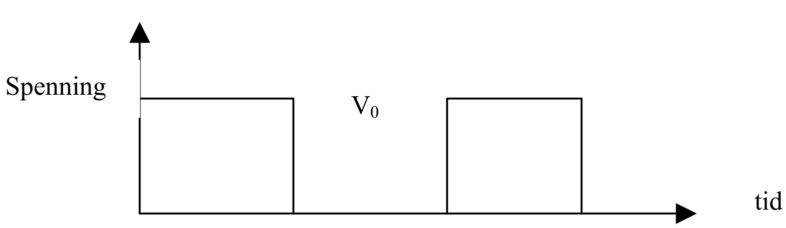
Utladning:

En RC krets består av en kondensator (C) og en motstand (R) som er koblet i serie; se figuren under.



RC -krets

Spenningskilden kan levere firkantspenning, se figuren under:



Firkantspenning

En firkantspenning er et periodisk signal der spenningen endres mellom null og en viss verdi V_0 i like lange tidsrom. Vi tenker oss at spenningen over polene på kilden har vært V_0 og at den har vært på så lenge at hele denne ligger over kondensatoren. Ladningen på kapasitansen er da, $Q_0 = C \cdot V_0$. Når spenningen plutselig blir lav (null), og vi regner tiden fra dette tidspunkt (*t = 0*), begynner kapasitansen å lade seg ut gjennom motstanden R.

I følge sløyferegelen (Kirchhoffs II lov), som sier at summen av spenninger rundt en lukket sløyfe er null, kan vi skrive:

$$\frac{Q}{C} - I \cdot R = 0 , \qquad \textit{(Kirchhoffs II lov)}$$

hvor Q er øyeblikksverdien av ladningen som ligger på kondensatorplata. Strømmen er lik reduksjonen ladningen Q i tidsenheten, eller:

$$I = -\frac{dQ}{dt} . \qquad \textit{(definisjon av strøm)}$$

Minustegnet oppstår på grunn av at positiv strømretning er definert som retningen fra **+** *pol* til **-** *pol*. Innsatt i sløyfelikningen gir dette:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} , \qquad \text{eller omskrevet:} \qquad \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot dt ,$$

som ved integrasjon gir:

$$\int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t dt , \qquad \text{som gir:} \quad \ln(\frac{Q}{Q_0}) = -kt , \quad \text{eller:} \; Q(t) = Q_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) ,$$

der: $\tau \equiv R \cdot C$, og som kalles *tidskonstanten.*

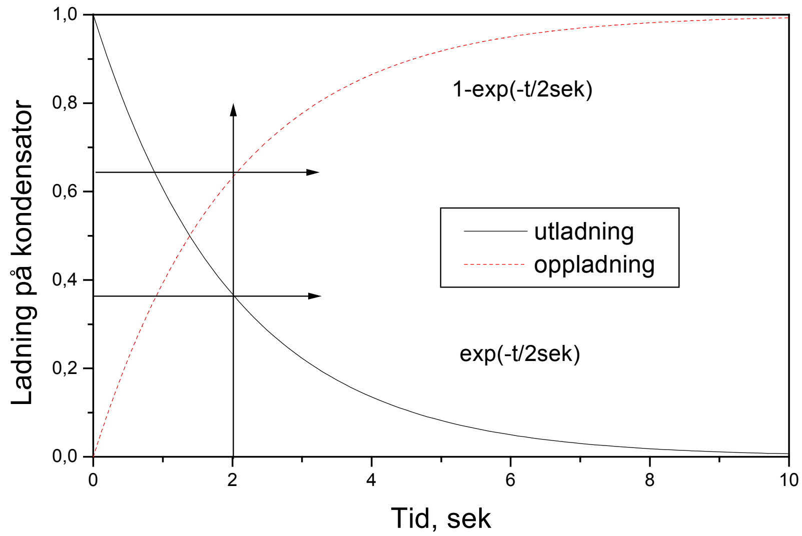
Dette er den tiden som går med for at ladningen er redusert til *1/e* del av sin opprinnelige verdi, som ses ved innsetting i uttrykket for ladning som funksjon av tid:

$$Q(t = \tau) = Q_0 \cdot e^{-1} = \frac{Q_0}{e} = \frac{Q_0}{2.718} ,$$

Strømmen finnes ved derivasjon av ladningen:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) = \frac{V_0}{R} \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) = I_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) ,$$

der I_0 er strømmen ved tiden t = 0. Denne funksjonen er vist i grafen nedenfor:



Opp-og utladning av en RC krets

Oppladning
Vi tar som utgangspunkt at kapasitansen er utladet og regner tiden fra når spenningen plutselig blir høy (V_0). Ifølge sløyferegelen vil vi nå ha:

$$V_0 - I \cdot R - \frac{Q}{C} = 0\,,$$

I dette tilfellet vil strømmen øke ladningen på kapasitansen; $I = \frac{dQ}{dt}$, og vi kan omforme

likningen slik: $C \cdot V_0 - Q = \frac{dQ}{dt} \cdot RC$, som etter videre omforming blir:

$$\int_0^Q \frac{dQ}{Q_0 - Q} = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t dt\,, \quad (Q_0 \equiv C \cdot V_0)\text{, som gir:} \qquad Q(t) = Q_0 \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$$

Strømmen finnes igjen ved derivasjon av ladningen:

$$I = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)\,.$$

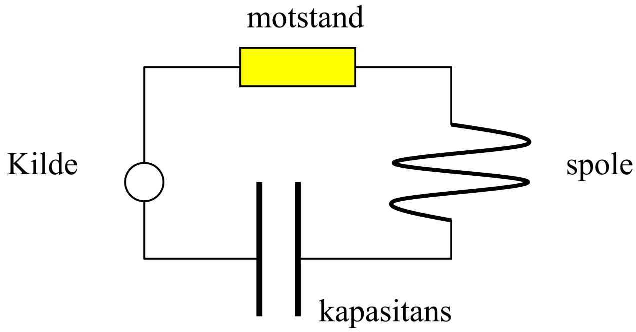
Og spenningen over kondensatoren blir:

$$V(t) = \frac{Q}{C} = V_0 \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$$

Denne funksjonen er også vist i figuren over.

1b ; *Teori for vekselstrømskretser*

La oss se på følgende krets:



Krets med motstand, spole og kapasitans (RLC-krets)

Kretsen består av en motstand (R), en spole (L) og en kondensator (C) som er koblet i serie. Det sendes inn en vekselspenning : $V = V_0 \cos(\omega t)$ på kretsen, der V_0 er amplituden (maksimalverdien) og ω er sirkelfrekvensen. I følge Kirchhoffs II lov vil vi ha for denne kretsen:

$$V = \frac{Q}{C} + RI + L \cdot \frac{dI}{dt}. \qquad \textit{(Kirchhoff II)}$$

Det er strømmen vi skal finne, og det gjør vi lettest ved bruk av komplekse tall:

Fordi vi har likningen: $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ (de Moivres regel),
kan spenningen skrives som: $V = V_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(V_0 \cdot \exp(i\omega t))$ (*Re* betyr realdelen)

Vi innfører dette fordi regning med eksponentialfunksjoner er mye lettere enn bruk av cosinusfunksjoner, og på slutten av beregningen tar vi ut realdelen av det komplekse svaret. Kirchhohhs II lov er bestemmelseslikningen for strømmen, som vi kan skrive på tilsvarende vis:

$$I = \mathrm{Re}(I_0 \cdot \exp(i(\omega t - \varphi))), \qquad i \text{ er enheten langs imaginær akse}$$

der φ er faseforskjellen mellom strøm og spenning og I_0 er maksimalverdien av strømmen. Det er disse størrelsene vi ønsker å finne. Når Kirchhoffs likning deriveres, får vi:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} + R \cdot \frac{dI}{dt} + L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2}$$

Derivasjon av venstresiden gir; $\frac{dV}{dt} = V_0 \cdot \exp(i\omega t) \cdot i\omega$; og første ledd på høyresiden blir:
$\frac{1}{C} \cdot I = \frac{1}{C} \cdot I_0 \cdot \exp(i(\omega t - \varphi))$. De to siste leddene finnes ved derivasjon og dobbelderivasjon av uttrykket for strømmen: $I = I_0 \cdot \exp(i(\omega t - \varphi))$. Når dette settes inn i Kirchhoffs II likning fås:

$$i\omega V_0 \cdot \exp(i\omega t) = I_0 \exp(i(\omega t - \varphi) \cdot (\frac{1}{C} + R(i\omega) + L(i\omega)^2)$$, som videre gir:

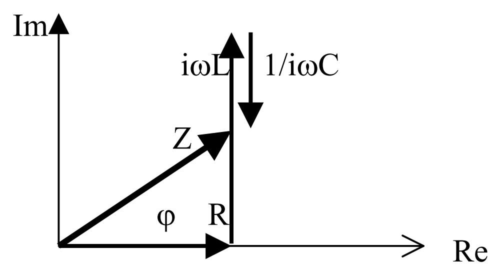
$$\frac{V_0}{I_0}\cdot \exp(i\varphi) = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L\,.$$

I analogi med Omhs lov for en ren motstand (R), defineres impedansen (Z) til kretsen på følgende måte: $Z \equiv \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0}\cdot \exp(i\varphi)\,.$

For LRC kretsen kan dermed impedansen skrives som summen av tre bidrag;

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}\quad ,\qquad Z_R = R \qquad \text{og } Z_L = i\omega L\,.$$

Disse kan framstilles i det komplekse planet som vektorer (se figuren).

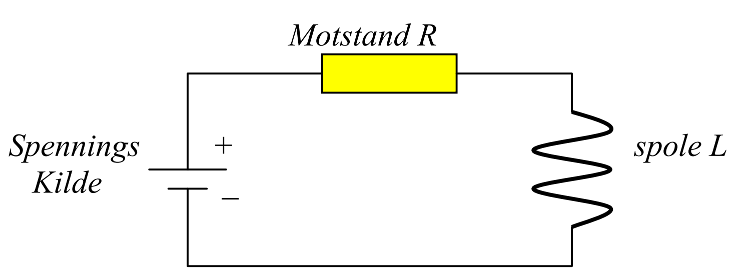


Impedanser i det komplekse plan

Tallverdien av impedansen blir: $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}$, og faseforskjellen mellom strøm og spenning blir: $tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

Teori for RL kretser

Vi vil måle strømmen i en krets bestående av en motstand (R) og en spole (L) i serie (en RL krets) som pålegges firkantpulser. RL kretsen er vist i figuren nedenfor;



en RL krets

Den består av en spenningskilde, som leveres firkantspenning, og en motstanden R og en spole L som er koblet i serie. Summeres spenningsfallene over kretsen, fås:

$$V_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \text{(\textit{Kirchhoffs II lov})}$$

Løses denne likningen, fås:

$$I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - \exp(-\frac{R}{L} \cdot t)) = \frac{V_0}{R}(1 - \exp(-t/\tau))\,,$$ regnet fra tidspunktet når spenningen går fra lav til høy (V_0).

Størrelsen $\tau = \frac{L}{R}$ kalles *tidskonstanten* for RL kretsen. Når spenningen skifter fra høy til lav (null), får en tilsvarende:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cdot \exp(-t/\tau) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

Igjen er tidskonstanten den tiden som medgår før signalet har nådd *1/e* del av den opprinnelige verdien:

$$I(t = \tau) = I_0 \cdot e^{-1}$$

Før resultatene inn i en elektronisk journal. Det vil si at Excel beregninger figurer kopieres inn i et Word dokument, hvor det også kan gjøres egen kommentarer.